

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

子計畫二：金屬板材深引伸成形極限之三維有限元素分析

(3/3)

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-032-001-

執行期間：94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日

執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

計畫主持人：李經綸

共同主持人：葉豐輝

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 31 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 ☒ 成果報告
☐ 期中進度報告

金屬成形極限之三維有限元素分析軟體開發與整合應用--子計畫二
金屬板材深引伸成形極限之三維有限元素分析

A Study of forming limit in deep drawing process of metal sheet by the 3-D FEM analysis

計畫類別：☐ 個別型計畫 ☒ 整合型計畫

計畫編號：NSC 94-2212-E-032-001

執行期間：92 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日

計畫主持人：李經綸 副教授

共同主持人：葉豐輝 副教授

計畫參與人員：蔡毅瑋、陳振德、陳紹平、蕭啟成、鄧維明、劉得仁、
溫昇泯

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：☐ 精簡報告 ☒ 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- ☐ 赴國外出差或研習心得報告一份
- ☐ 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- ☐ 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- ☐ 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

☐ 涉及專利或其他智慧財產權，☐ 一年 ☐ 二年後可公開查詢

執行單位：淡江大學機械與機電工程學系

中 華 民 國 九 十 五 年 十 月 三 十 一 日

摘 要

本計畫採用顯性動態有限元素法，結合材料彈塑性理論與延性破裂準則，發展出一套三維增量型有限元素分析程式，進行金屬板材方杯拉伸成形製程及破裂之分析。並完成方杯拉伸成形之沖頭負荷、應力分布、應變分布、工件厚度分布、成形極限圖、成形歷程，及裂紋成長之模擬。

再配合方杯拉伸成形實驗，設計一組方形沖頭、沖模，及壓料板，於油壓成形機上實驗，並將有限元素分析所得之結果與實驗結果作比較，以驗證本計畫所發展之三維顯性動態有限元素分析程式之可靠性。

經由數值模擬與實驗結果比較得知，在方杯拉伸過程中，當沖頭衝程達到 13.25mm 時，工件沿輓軋方向夾 45 度角之角隅處已發生破裂，由於此處受到最大的雙軸向拉伸應力，因此最大等效應力、等效應變及厚度最小值，均集中於此區域，並最先達到臨界破裂之應變能密度值 140MPa，裂紋將從此處開始發生，而拉伸成形之最大沖頭負荷則隨著沖模平行邊入模圓弧角半徑，與沖頭底邊圓弧角半徑之遞增而遞減。方杯拉伸成形中，當沖頭衝程達 13.05mm 時，由其主應變值及次應變值所繪製出之成形極限圖可知，工件已達到頸縮不穩定之範圍，而方杯拉伸在沖頭衝程達 13.25mm 時，由其成形極限圖中之應變分佈可知，工件已達到破裂之範圍。數值模擬之結果皆可合理的模擬實驗結果，故本顯性動態有限元素分析程式，可合理預測方杯拉伸成形極限。

關鍵詞：顯性動態有限元素，彈塑性，方杯拉伸

Abstract

This project employed the explicit dynamic finite element program, associating with the elasto-plastic theory and the criterion for ductile fracture, to analyze the square cup stretching process and fracture in the forming process. Simulations of punch loads, stress distributions, strain distributions, thickness distributions, forming limit diagram, deformation history, and the crack growth were also achieved by the explicit dynamic finite element program.

A set of tools such as square punch, die, and blank holder, were designed to perform experiments, which were implemented on the hydraulic forming machine. The simulation and experimental results were compared to verify the reliability about the development of elasto-plastic three-dimensional explicit dynamic finite element program in this project.

According to the experiment and simulation results, when the punch stroke attained 13.25mm, the contact region between workpiece and punch corner was fractured, because the contact region was subjected to the maximum biaxial stretching stress. Nevertheless, the minimum thickness, the maximum effective stress and maximum effective strain were all concentrated on the corner, and the strain energy density also first reached the limit fracture value 140MPa, then the crack propagation started. Moreover, the maximum punch load decreased as the die arc radius or punch profile radius became larger. According to the forming limit diagram, when the punch stroke attained 13.05mm, the workpiece may start necking. And the workpiece was fractured when the punch stroke attained to 13.25mm. The simulation results showed good agreement with the experiment results, so the dynamic explicit finite element program could simulate the square-cup stretching process reasonably.

Keywords : explicit dynamic finite element, elasto-plastic, square cup stretching

目 錄

中文摘要	I
英文摘要	II
目 錄	III
圖表索引	V
一、緒論	1
1.1 前言	1
1.2 研究動機與目的	1
1.3 文獻回顧	2
1.4 論文之構成	3
二、基本理論	4
2.1 基本假設	4
2.2 前言	4
2.3 有限變形之應變與應變率	5
2.4 有限變形之應力	6
2.5 虛功原理	7
2.5.1 Total Lagrangian formulation	8
2.5.2 Updated Lagrangian formulation	10
2.6 應變能密度	12
2.7 破裂之三種模式	12
三、有限元素分析	18
3.1 動態有限元素分析	18
3.1.1 Total Lagrangian formulation	19
3.1.2 Updated Lagrangian formulation	21
3.2 顯性時間積分法	24
3.3 顯性動態有限元素計算程序	24
3.4 模具曲面與彈性棒之描述	25
3.5 接觸力的推算	25
四、方杯拉伸成形之實驗與數值分析	30
4.1 實驗設備	30
4.2 實驗原理與步驟	30
4.3 邊界條件	31
4.4 材料參數	31
4.5 數值模擬分析	32
4.6 數值分析與實驗結果之比較	32

4.6.1 方杯拉伸成形之歷程 -----	32
4.6.2 方杯工件之等效應力分佈 -----	35
4.6.3 方杯工件之等效應變分佈 -----	35
4.6.4 不同彈性棒面積之沖頭負荷比較 -----	35
4.6.5 方杯工件之成形極限圖 -----	35
4.6.6 工件厚度分佈之比較 -----	36
4.6.7 不同沖頭底邊圓弧角半徑之沖頭負荷比較 -----	36
4.6.8 不同沖模平行邊入模圓弧角半徑之沖頭負荷比較 ----	37
五、實驗擷取設備 -----	67
5.1 InstruNet -----	67
5.2 National Instruments DAQPad-6016 -----	67
5.3 實驗設備擷取之比較 -----	67
5.4 單端式(Single-ended)與差分式(Differential)之差異 -----	68
六、結論 -----	79
6.1 結論 -----	79
七、參考文獻 -----	80
八、符號索引 -----	82
九、誌謝 -----	88
十、計畫成果自評 -----	89

圖表索引

圖 2-1	物體在不同時間狀態於卡式座標系運動之示意圖	14
圖 2-2	物體之變形圖	14
圖 2-3	定義應力之連體	15
圖 2-4	Lagrange 應力示意圖	15
圖 2-5	Kirchhoff 應力示意圖	16
圖 2-6	預測破裂及降伏之應變能密度曲線分佈圖	16
圖 2-7	裂縫尖端之座標定義	17
圖 2-8	破裂之三種模式	17
圖 3-1	顯性動態有限元素分析之流程圖	27
圖 3-2	模具曲面之定義	28
圖 3-3	料片節點與模具之接觸判斷	29
圖 3-4	Penalty 法計算節點之外力	29
圖 4-1	實驗設備之整體系統配置圖	38
圖 4-2	方杯拉伸製程的模具配置圖	39
圖 4-3	方杯拉伸製程之模具尺寸圖	39
圖 4-4	方杯拉伸成形之沖頭	40
圖 4-5	方杯拉伸成形之沖模	40
圖 4-6	方杯拉伸成形之壓料板	41
圖 4-7	方杯拉伸成形之料片	41
圖 4-8	方杯拉伸成形四分之一料片之網格分割及邊界條件設定	42
圖 4-9	方杯拉伸成形壓料板之元素分割	43
圖 4-10	方杯拉伸成形沖模之元素分割	43
圖 4-11	方杯拉伸成形沖頭之元素分割	44
圖 4-12	沖頭衝程達 4.00mm 時之工件變形圖	44
圖 4-13	沖頭衝程達 8.00mm 時之工件變形圖	45
圖 4-14	沖頭衝程達 11.79mm 時之工件變形圖	45
圖 4-15	沖頭衝程達 11.791mm 時工件局部放大之變形圖	46
圖 4-16	沖頭衝程達 11.792mm 時工件局部放大之變形圖	46
圖 4-17	沖頭衝程達 11.94mm 時工件局部放大之變形圖	47
圖 4-18	沖頭衝程達 12.40mm 時工件局部放大之變形圖	48
圖 4-19	沖頭衝程達 12.48mm 時工件局部放大之變形圖	48
圖 4-20	沖頭衝程達 12.52mm 時工件局部放大之變形圖	49
圖 4-21	沖頭衝程達 12.56mm 時工件局部放大之變形圖	49
圖 4-22	沖頭衝程達 12.58mm 時工件局部放大之變形圖	50

圖 4-23 沖頭衝程達 12.60mm 時工件局部放大之變形圖	50
圖 4-24 沖頭衝程達 12.62mm 時工件局部放大之變形圖	51
圖 4-25 沖頭衝程達 12.64mm 時工件局部放大之變形圖	51
圖 4-26 沖頭衝程達 12.70mm 時工件局部放大之變形圖	52
圖 4-27 沖頭衝程達 13.00mm 時工件局部放大之變形圖	52
圖 4-28 沖頭衝程達 13.14mm 時工件局部放大之變形圖	53
圖 4-29 沖頭衝程達 13.16mm 時工件局部放大之變形圖	53
圖 4-30 沖頭衝程達 13.20mm 時之工件變形圖	54
圖 4-31 沖頭衝程達 13.20mm 時工件局部放大之變形圖	54
圖 4-32 方杯拉伸破裂之數值分析與實驗之沖頭負荷與衝程關係	57
圖 4-33 方杯拉伸破裂之數值模擬與實驗工件之比較	57
圖 4-34 方杯拉伸實驗之沖頭衝程達 13.19mm 時發生頸縮之工件	58
圖 4-35 方杯拉伸實驗之沖頭衝程達 13.25mm 時發生破裂之工件	58
圖 4-36 方杯拉伸於沖頭衝程 13.20mm 之等效應力分佈圖	59
圖 4-37 方杯拉伸於沖頭衝程 13.20mm 之等效應力等值線分佈圖	59
圖 4-38 方杯拉伸於沖頭衝程 13.20mm 之等效應變分佈圖	60
圖 4-39 方杯拉伸於沖頭衝程 13.20mm 之等效應變等值線分佈圖	60
圖 4-40 方杯拉伸於固定沖頭及沖模圓弧角半徑 R6 下與不同彈性棒面積之數值 模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較	61
圖 4-41 成形極限示意圖	61
圖 4-42 方杯拉伸數值模擬在衝程達 13.05mm 之成形極限圖	62
圖 4-43 方杯拉伸數值模擬在衝程達 13.25mm 之成形極限圖	62
圖 4-44 工件沿 0 度方向厚度分佈之量測示意圖	63
圖 4-45 沖頭衝程達 13.25mm 之數值模擬與實驗工件沿 0 度方向厚度分佈之比較	63
圖 4-46 工件沿 45 度方向厚度分佈之量測示意圖	64
圖 4-47 沖頭衝程達 13.25mm 之數值模擬與實驗工件沿 45 度方向厚度分佈之比較	64
圖 4-48 不同沖頭底邊圓弧角半徑之尺寸示意圖	65
圖 4-49 方杯拉伸於固定沖模圓弧角半徑 R6 下與不同沖頭圓弧角半徑之數值模 擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較	65
圖 4-50 不同沖模平行邊入模圓弧角半徑之尺寸示意圖	66
圖 4-51 方杯拉伸於固定沖頭圓弧角半徑 R6 下與不同沖模圓弧角半徑之數值模 擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較	66
圖 5-1 i100HC 資料擷取盒	69
圖 5-2 i200 資料擷取卡	69

圖 5-3	直流訊號傳送器 -----	70
圖 5-4	電壓訊號源使用 differential 之連接示意圖 -----	71
圖 5-5	雷射位移計液及壓缸壓力訊號接線之概況 -----	71
圖 5-6	instruNet 擷取裝置之程式面板圖 -----	72
圖 5-7	instruNet 擷取裝置之內部圖框程式 -----	72
圖 5-8	NI DAQPad-6016 資料擷取裝置 -----	73
圖 5-9	雷射位移計 -----	74
圖 5-10	NI DAQPad-6016 資料擷取裝置類比訊號接線之概況 -----	74
圖 5-11	NI DAQPad-6016 擷取裝置之程式面板圖 -----	75
圖 5-12	NI DAQPad-6016 擷取裝置之內部圖框程式 -----	75
圖 5-13	三組實驗設備擷取之沖頭負荷與衝程之比較 -----	77
圖 5-14	兩個訊號來源下的 Signal-Ended 電壓量測 -----	77
圖 5-15	一個訊號來源下的 Differential 電壓量測 -----	78

表 4-1	模具與料片有限元素網格分割之相關數據	42
表 4-2	料片破裂前後節點之座標數據	47
表 4-3	料片於不同衝程時節點破裂前後之應變能密度	55
表 4-4	料片於不同沖頭衝程時新增節點之情形	56
表 5-1	i100HC 資料擷取盒規格	70
表 5-2	NI DAQPad-6016 資料擷取裝置規格	73
表 5-3	雷射位移計規格	73
表 5-4	$\pm 5V$ 電壓訊號之線性轉換數據	76
表 5-5	$\pm 10V$ 電壓訊號之線性轉換數據	76
表 5-6	三組實驗擷取設備之沖頭負荷與衝程之比較	76

一、緒論

1.1 前言

在機械製造領域中，板金成形為一項重要的技術，並廣範地應用於汽車、航太及電子工業，板金成形即施加外力，使材料超過彈性限度達到塑性，產生變形，而完成所需的形狀。板金成形包含了深引伸、孔凸緣、頸縮、彎曲、鼓脹等製程，為了要瞭解板金之成形性，以往傳統方式是利用嘗試錯誤而改進的方法，浪費了許多不必要的成本，隨著近年來電腦運算速度不斷提升，和電腦輔助分析軟體之日益精進，我們可以經由模擬分析，了解材料性質和製程參數的關係，達到最佳化板金成形製程，並在需要更換不同成形條件時，能快速得到結果，和傳統實際開模測試相比，更能達到降低開發時間和成本之目的，並藉此提高工件可靠度和品質的要求，來提升產品競爭性。

本計畫所研究之方杯拉伸成形係以沖頭於金屬板材上施加負荷，此時料片會承受到軸向與環向之拉伸應力，最後達到所要的外型。一般方杯拉伸成形，隨著沖頭衝程的增加，此時杯底圓弧轉角部份將會薄化，產生頸縮，甚至發生破裂。為了要改善此現象的發生以及防止成形時發生破裂，而改善製程之成形性，由預先模擬方杯拉伸成形製程之最終結果，來作為未來實際加工時之參考，而取代一般傳統加工所採用的試誤法，以便得到較精確的產品。

1.2 研究動機與目的

金屬板金成形技術為製造工業中的一項重要技術之一，其應用也相當廣泛，為縮短加工所需時間與因應產品的多變性外，降低生產成本更是現今工業當務之急，因此開發金屬板金數值分析模擬系統，可將加工成形過程利用資料庫、網路及電腦支援進而縮短開發及設計時程來降低成本，亦可提升新產品的品質。

由於傳統製造業開發產品的時間過久與成本過於龐大，因此為了要降低研究時程與開發成本，就必須很清楚的瞭解在金屬成形製程中各種加工參數對於成形過程的影響，其影響成形過程中的加工參數包括金屬板材的材料特性與變形行為、模具的幾何外形、加工速率、摩擦係數等等。因此為了分析工件在成形的過程之中所發生的種種現象，及預估工件之最終成形狀態，於是導入電腦輔助工程技術，藉此發展出一套應用在金屬成形之模具設計與數值分析軟體，應用此一技術可有效的提昇產品的良率，並縮短開發產品到量產所需的時間。本計畫係採用顯性動態有限元素法，結合材料彈塑性理論，發展出一套增量型彈塑性大變形之三維顯性動態有限元素分析程式，並利用九節點元素來描述模具曲面外形及其邊界條件，亦發展出彈性棒元素來處理料片與模具之接觸問題，將此彈性棒與三維實體元素耦合後，應用於金屬板材方杯拉伸成形之三維有限元素分析。

本計畫將方杯拉伸製程之分析和實驗結果作比較，以探討方杯拉伸成形時的變形及破裂裂紋成長歷程、沖頭負荷與衝程之關係、厚度分佈、成形極限，及不同模具幾何外形對成形性的影響等。

1.3 文獻回顧

與本計畫相關之文獻有 Bathe 等[1]由連續力學，推導出非線性之靜態和動態有限元素方程式，包含了大位移、大應變及材料非線性，利用同參有限元素之離散化，可得到方程式之數值解。Huang 與 Liu [2]在方杯拉伸製程中，利用應變能密度準則，計算材料發生破裂時之等效應力及應變之積分達到材料之臨界應變能密度值，來預測鋁板材發生破裂之衝程。Takuda 等[3]利用 Oyane 之準則來預測不同鋁合金和軟鋼之複合層板金在深引伸製程之破裂，無論破裂處是發生在沖頭倒圓角，或是杯壁處皆能成功的預測，而鋁合金加上軟鋼之複合層板，比單層之鋁合金板材有較佳的成形性。Mamalis 等[4]利用非線性動顯函程式，模擬四種鍍鋅鋼板之拉伸成形，來預測其成形極限圖，和實驗量測之成形極限圖，有良好的 consistency。Jain 等[5]利用不同延性破裂準則，預測鋁板成形極限圖之破裂曲線，和實驗做驗證後，發現 Tresca 之準則能具有大範圍的準確性。Takuda 等[6]應用延性破裂準則，結合有限元素模擬，來預測鋁合金板材和鋼板深引伸之成形極限，和實驗相較下，即使破裂發生時，沒有產生頸縮或變薄之現象，Cockcroft-Latham、Brozzo、Oyane 之準則依然能成功的預測。Takuda 等[7]利用剛塑性有限元素法，模擬半球形、圓柱形，及圓錐沖頭之孔凸緣製程，代入 Oyane 之準則來預測軟鋼和高強度鋼之破裂開始處及臨界衝程，和實驗結果驗證後皆有良好的一致性。Takuda 等[8]將有限元素法模擬得到之元素應力、應變值，結合延性破裂準則之方式，來預測板金之成形極限，利用軟鋼及高強度鋼板材，探討擴孔製程之工件破裂的預估，結果和實驗比較後，顯示出破裂初始處與臨界衝程，均可成功的由此方法求得。Worswick 與 Finn [9]由顯性動態有限元素法，模擬圓孔和方孔料片之凸緣拉伸之成形比較 von Mises、Hill，及 Barlat 降伏準則預測之應變分佈，預測之成形極限圖和實驗結果一致。Han 和 Kim[10]發現一般之延性破裂準則，無法在成形極限曲線上，成功地預測較低延性之板材，若結合了 Cockcroft-Latham 之延性破裂準則和最大剪應力準則後，則無論是低延性板材之複雜破裂曲線，或高延性板材之線性破裂曲線皆能夠合理預測。Zacharopoulos[11]利用有限元素法計算之應變能密度曲線，預測破裂之路徑發生於應變能密度曲線之相對較小值部份，再經由三點彎曲(TPB)及雙懸臂梁試驗(DCB)進行驗證，結果和理論解預測之破裂產生位置有良好的一致性。鋼材在結構中為常見之材料，為了安全及經濟之考量了解材料特性及破裂之行為是必須的。

1.4 論文之構成

本論文分為五章，其概要內容分別敘述如下：

第一章為緒論，說明近年來將有限元素法應用於板金成形上的發展與應用，並歸納方杯拉伸成形中所需探討之問題，並介紹與本研究相關之理論與相關領域之文獻回顧，而後描述本計畫之目的與論文架構。

第二章為基本理論，首先介紹與本論文有關之基本假設，其次介紹虛功原理之表示方式及基本方程式，再利用虛功原理來求得 Total Lagrangian Formulation 與 Updated Lagrangian Formulation 之統制方程式，和材料構成式與應變能密度之理論，最後為破裂模式的簡介。

第三章為動態有限元素分析，首先描述動態有限元素計算程序，而後求得顯性動態有限變形之 T.L.F 與 U.L.F 之增量平衡方程式與運動方程式，再推導顯性時間積分之中央差分法，並說明接觸力之推算，最後描述各種工具介面之種類，並利用九節點元素來描述模具外形。

第四章為方杯拉伸成形之實驗與數值分析，首先說明方杯拉伸成形之實驗原理及步驟，並描述方杯拉伸成形時之邊界條件，其次說明與本研究相關之材料參數，接著將方杯拉伸成形之數值分析與實驗結果進行比較，數值分析與實驗結果方面，將探討方杯拉伸成形時之變形及破裂裂紋成長歷程、工件之等效應力及等效應變分佈、不同彈性棒面積大小之沖頭負荷與衝程關係、工件之主應變和次應變構成之成形極限圖、工件厚度分佈，及改變沖頭、沖模幾何參數之條件下，沖頭負荷與衝程關係等，來對數值模擬結果加以探討。

第六章為結論，針對第四章之結果與討論做出結論，並對於方杯拉伸裂紋之相關分析，提出未來之研究發展方向。

二、基本理論

2.1 基本假設

本計畫所採用之材料於彈塑性變形時，其基本假設條件如下所述：

- (1) 材料為均質性 (Homogeneous) 且等向性 (Isotropic)。
- (2) 材料於加工時不考慮溫度效應。
- (3) 材料於加工前無內應力存在。
- (4) 材料於彈性區域內滿足虎克定律 (Hooke's Law)。
- (5) 材料遵循 von Mises 降伏法則，且於塑性變形後，依循 Prandtl-Reuss 之流動法則。
- (6) 材料塑性變形時具有等向性之應變硬化影響。
- (7) 材料之應變率可分為彈性與塑性應變率兩部份。
- (8) 沖頭、沖模與壓料板皆視為剛體。

2.2 前言

在非線性動態有限元素分析中，包含大位移、大應變，及材料非線性，通常都採用運動方程式之增量形式來推導。基本上，於增量型非線性有限元素分析中採用兩種不同的方法：第一種為靜態和動態分析之變量，皆參考變形前之座標，且於整個分析過程中，參考之座標皆保持不變，這種方法稱為 Total Lagrangian formulation。第二種為靜態和動態分析之變量，皆參考每一增量步驟變形時之座標，即在分析過程中，所參考之座標是不斷的被更新的，稱為 Updated Lagrangian formulation。

考慮一物體於卡式座標系之運動，如圖 2-1 所示，其目的是為了計算物體於不連續時間點 0 ， Δt ， $2\Delta t$ ， $3\Delta t$ ， \dots 的平衡位置，其中 Δt 為時間增量。假設從時間 0 到時間 t 於所有時間增量步驟的靜態和動態變量解皆已知，而欲求下一時間步驟 $t + \Delta t$ 平衡位置之解時，此一解的過程將重覆性的應用，直到完整地路徑被解出來為止。

本文分別以 0x_i ， tx_i ， ${}^{t+\Delta t}x_i$ (其中 $i=1, 2, 3$) 來描述物體於時間 0 ， t 與 $t + \Delta t$ 時之座標，其中左上標為物體的時間狀態，而右下標為座標軸。物體在時間 t 和 $t + \Delta t$ 之位移，可類似座標的方式表示為 tu_i 和 ${}^{t+\Delta t}u_i$ (其中 $i=1, 2, 3$)，因此

$$\left. \begin{aligned} {}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i \\ {}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{其中 } i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

由時間 t 到 $t + \Delta t$ 的未知位移增量可表示為

$$u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i \quad (\text{其中 } i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

於物體運動期間，其體積、表面積、質量密度，應力和應變都會連續地發生變化。物體於時間 0 ， t 和 $t + \Delta t$ 所指定之面積，和體積分別以 ${}^0 A$ ， ${}^t A$ ， ${}^{t+\Delta t} A$ ，及 ${}^0 V$ ， ${}^t V$ ， ${}^{t+\Delta t} V$ 來表示。

由於物體於時間 $t + \Delta t$ 之座標未知，而作用力、應力和應變，則是參考已知的平衡位置。表面力、體積力及應力等物理量，採用與座標和位移類似的方式表示，左上標表示物理量發生的時間狀態，而左下標則表示物理量被量測之時間狀態，例如 Cauchy 應力張量於時間 $t + \Delta t$ 的卡式分量，以 ${}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ 表示，(Cauchy 應力常以發生的時間為參考狀態，故左下標可省略而表示為 ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$)，而 2nd Piola-Kirchhoff 應力張量於時間 t 量測時間 $t + \Delta t$ 狀態下之應力卡式分量，可表示為 ${}_t^{t+\Delta t} S_{ij}$ 。

而 Cauchy 極小應變張量參考時間 $t + \Delta t$ 狀態下的卡式分量，以 ${}_{t+\Delta t} e_{ij}$ 表示，Green-Lagrange 應變張量的卡式分量，則是採用時間 t 到 $t + \Delta t$ 之位移，參考時間 t 狀態下之卡式分量表示為 ${}_t^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 。

在統制平衡方程式中，位移和座標之微分必須被考慮，其中逗號表示對應緊接著座標之微分，而左下標表示在此座標被量測之參考狀態，例如

$${}_{0}^{t+\Delta t} u_{i,j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} u_i}{\partial {}^0 x_j} \text{ 和 } {}_{t+\Delta t}^0 x_{m,n} = \frac{\partial {}^0 x_m}{\partial {}^{t+\Delta t} x_n}。$$

2.3 有限變形之應變及應變率

在處理有限變形之彈塑性問題時，變形前、後不同的座標系統所描述之物理量將有所差異，假設變形前的座標系統為 ${}^0 x_1, {}^0 x_2, {}^0 x_3$ ，而變形後的座標系統為 x_1, x_2, x_3 時，若考慮一無窮小元素，於變形前長度為 ${}^0 P^0 Q$ ，變形後長度為 PQ ，

如圖 2-2 所示，則 Green-Lagrange 及 Almansi 應變張量可定義如下[12]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial {}^0x_j} - a_{ij}) \quad (2.3)$$

和

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial {}^0x_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial {}^0x_{\beta}}{\partial x_j}) \quad (2.4)$$

其中應變張量 ε_{ij} 定義於變形前之座標系統 0x_i ，為 Green 及 St. Venant 所提出，稱為 Green-Lagrange 應變張量；而應變張量 E_{ij} 定義於變形後座標系統 x_i ，在有限應變時，為 Almansi 與 Hamel 所提出，稱為 Almansi 應變張量；而在無窮小之應變時，為 Cauchy 所提出，稱為 Cauchy 應變張量； a_{ij} 為變形前座標系統 0x_i 之 Euclidean 度規張量，而 g_{ij} 為變形後座標系統 x_i 之 Euclidean 度規張量；若物體在變形前、後採用相同之直角座標系來描述時，則度規張量可表示為 $g_{ij} = a_{ij} = \delta_{ij}$ ，其中 δ_{ij} 為 Kronecker delta，則應變張量可進一步簡化如下

(1) Green-Lagrange 應變張量 (ε_{ij})

Green-Lagrange 應變是以變形前的座標 0x_i 為基準，其關係式如下所示

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial x_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial x_k}{\partial {}^0x_j} - \delta_{ij}) \quad (2.5)$$

(2) Green-Lagrange 應變率張量 ($\dot{\varepsilon}_{ij}$)

Green-Lagrange 應變率張量為 Green-Lagrange 應變張量對時間之微分，即將 (2.5) 式微分可得應變率張量

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial x_k}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial x_k}{\partial {}^0x_i} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial {}^0x_j}) \quad (2.6)$$

(3) Cauchy 應變張量 (e_{ij})

而 Cauchy 應變是以變形後的座標 x_i 為基準，其關係式如下所示

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad (2.7)$$

2.4 有限變形之應力

一般常用之應力有 Lagrange 應力、2nd Piola-Kirchhoff 應力，和 Cauchy 應力等三種，在有限變形中 Piola-Kirchhoff 應力張量，常用來表示對應於變形前座標之應力；而 Cauchy 應力張量，則常用來表示對應於變形時座標之應力；若在

極小變形或極小旋轉時，則 Cauchy 與 Piola-Kirchhoff 應力張量相同。本節針對變形前、後之作用力及面積，如圖 2-3 所示，定義應力張量如下

(1) Lagrange 應力 (σ_{ij})

Lagrange 應力張量 (σ_{ij})，也稱為 1st Piola-Kirchhoff 應力，係以變形後曲面上的作用力 dF ，及變形前之面積 d^0A 為基準，所定義之應力，如圖 2-4 所示，其關係式如下所示

$$d^0F_i^{(L)} = \sigma_{ji}^0 n_j d^0A = dF_i \quad (2.8)$$

其中 σ_{ji} 為非對稱形式，而 0n_j 為 d^0A 之單位法線向量之分量。

(2) 2nd Piola-Kirchhoff 應力 (S_{ij})

2nd Piola-Kirchhoff 應力張量 (S_{ij}) 係以變形前曲面上的作用力 dF_0 ，及變形前之面積 dA_0 為基準，所定義之應力，如圖 2-5 所示，其關係式如下所示

$$d^0F_i^{(K)} = S_{ji}^0 n_j d^0A = \frac{\partial^0 x_i}{\partial x_a} dF_a \quad (2.9)$$

其中 S_{ji} 為一對稱之應力張量即 $S_{ij} = S_{ji}$ ，一般是配合 Green-Lagrange 應變來應用，而 0n_j 為 d^0A 之單位法線向量之分量。

(3) Cauchy 應力 (τ_{ij})

Cauchy 應力張量 (τ_{ij}) 係以變形後曲面上的作用力 dF ，及變形後之面積 dA 為基準，所定義之應力，其關係式如下所示

$$dF_i = \tau_{ij} n_j dA \quad (2.10)$$

其中 τ_{ij} 為一對稱之應力張量即 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ，一般是配合 Cauchy 應變來應用，而 n_j 為 dA 之單位法線向量之分量。

2.5 虛功原理

由於各個不連續時間點 0 ， Δt ， $2\Delta t$ ， \dots ， t 之解皆已知，本節之目的是要建構一虛功原理方程式，來求解在時間 $t + \Delta t$ 時之未知靜態與動態變量。數值解是採用同參位移有限元素法，再利用虛功原理來表示物體在時間 $t + \Delta t$ 時之平衡狀態，並表示如下

$$\begin{aligned} & \int_{t+\Delta t_V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta {}_{t+\Delta t} e_{ij} d {}^{t+\Delta t} V \\ &= \int_{t+\Delta t_V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t_{A_f}} {}^{t+\Delta t} f_i^A \delta u_i^A d {}^{t+\Delta t} A \end{aligned} \quad (2.11)$$

而 ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$ 為 Cauchy 應力張量於時間 $t + \Delta t$ 的卡式分量，

$\delta_{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial t+\Delta t x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial t+\Delta t x_i} \right)$ 為對應虛位移 δu_i 之應變張量， ${}^{t+\Delta t} f_i^B$ 為時間

$t + \Delta t$ 時，每單位體積之作用外力， ${}^{t+\Delta t} f_i^A$ 為時間 $t + \Delta t$ 時，每單位面積所受之表面作用力，而 δu_i^A 為表面積 ${}^{t+\Delta t} A_f$ 上所求得之虛位移 δu_i 。

由於時間 $t + \Delta t$ 之狀態未知，所以 (2.11) 式不能直接求解，但可經由先前計算過的平衡狀態來求其解，而實際上有兩種方法可供選擇，即 T.L. formulation 和 U.L. formulation，描述如下

2.5.1 Total Lagrangian formulation

當採用 Total Lagrangian formulation 時，於 (2.11) 式中的所有變量皆參考物體在時間 0 的初始狀態，將 (2.11) 式中 Cauchy 應力乘上微小應變變分後之體積分，可改寫如下

$$\int_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} \tau_{sr} \delta_{t+\Delta t} e_{sr} d{}^{t+\Delta t} V = \int_{{}_0 V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d{}_0 V \quad (2.12)$$

其中 ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ 為時間 $t + \Delta t$ 之 2nd Piola-Kirchhoff 應力張量對應於時間 0 時之量測，而 2nd Piola-Kirchhoff 應力及 Cauchy 應力之轉換如下所示

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}_0 \rho}{\rho_{t+\Delta t}} {}_0 x_{i,s} {}^{t+\Delta t} \tau_{sr} {}_0 x_{j,r} \quad (2.13)$$

且 $\delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 為時間 $t + \Delta t$ 時 Green-Lagrange 應變張量之卡式分量之變分對應時間 0 之狀態，其應變一位移關係如下所示

$$\delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j} \right) \quad (2.14)$$

將 (2.12) 式代入 (2.11) 式中，則物體在時間 $t + \Delta t$ 時，而參考狀態為時間 0 之平衡方程式，可表示如下

$$\int_{{}_0 V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d{}_0 V = \int_{{}_0 V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d{}_0 V + \int_{{}_0 A_f} {}^{t+\Delta t} f_i^A \delta u_i^A d{}_0 A \quad (2.15)$$

由於 (2.15) 式中時間 $t + \Delta t$ 之 2nd Piola-Kirchhoff 應力 ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ 與

Green-Lagrange 應變 ${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$ 未知，故採用下列之增量分解

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = {}^t{}_0S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (2.16)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = {}^t{}_0\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \quad (2.17)$$

其中時間 t 之 2nd Piola-Kirchhoff 應力張量 ${}^t{}_0S_{ij}$ 與 Green-Lagrange 應變張量 ${}^t{}_0\varepsilon_{ij}$

為已知，而 Green-Lagrange 應變增量 ${}_0\varepsilon_{ij}$ 可分解為

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (2.18)$$

其中 ${}_0e_{ij}$ 和 ${}_0\eta_{ij}$ 分別為對應於時間 0 的線性和非線性應變增量，而應變增量與位移之關係如下所示

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t{}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}^t{}_0u_{k,i} {}^t{}_0u_{k,j} \right) \quad (2.19)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (2.20)$$

將 (2.17) 式與 (2.18) 式於時間 $t + \Delta t$ 之狀態下取變分，則 $\delta {}^t{}_0\varepsilon_{ij} = 0$ ，故

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0\varepsilon_{ij} \quad (2.21)$$

$$\delta {}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0e_{ij} + \delta {}_0\eta_{ij} \quad (2.22)$$

將 (2.16) 式與 (2.22) 式代入 (2.15) 式可得

$$\begin{aligned} & \int_{0_V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\varepsilon_{ij} d^0V + \int_{0_V} {}^t{}_0S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V \\ &= \int_{0_V} {}^{t+\Delta t}{}_0f_i^B \delta u_i d^0V + \int_{0_{Af}} {}^{t+\Delta t}{}_0f_i^A \delta u_i d^0A - \int_{0_V} {}^t{}_0S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (2.23)$$

上式表示採用 T.L. formulation 含增量分解之虛功原理方程式。

由於 (2.23) 式中 $\delta {}_0\varepsilon_{ij}$ 含非線性之位移增量，故無法直接求解，若使用泰勒展開式進行線性化，則線性化之近似解如下所示

$$\int_{0_V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\varepsilon_{ij} d^0V$$

$$= \int_{0_V} \left[\frac{\partial_0^t S_{ij}}{\partial_0^t \varepsilon_{rs}} \bigg|_t \left({}_0 e_{rs} + {}_0 \eta_{rs} \right) + \text{higher order terms} \right] \delta({}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}) d^0 V \quad (2.24)$$

若忽略 (2.24) 式中之非線性項及高階項，並利用下列之本構關係式

$${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \quad (2.25)$$

則 T.L. formulation 之虛功原理方程式經線性化後，可改寫如下

$$\begin{aligned} & \int_{0_V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0 V + \int_{0_V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0 V \\ &= \int_{0_V} {}_0^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^0 V + \int_{0_{A_f}} {}_0^{t+\Delta t} f_i^A \delta u_i^A d^0 A - \int_{0_V} {}_0^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0 V \end{aligned} \quad (2.26)$$

在 T.L. formulation 中，(2.26) 式可用來計算位移增量，再計算相對於時間 $t + \Delta t$ 時之位移、應變及應力之近似解。

2.5.2 Updated Lagrangian formulation

在有限元素之數值解析中，大多數的 updated formulation 被限制在小應變或等應變的條件下進行分析。

在 U.L. formulation 中，(2.11) 式中所有的變量皆參考時間 t 之狀態，即物體變形後之狀態，經由類似 T.L. formulation 的推導過程，則 (2.11) 式可改寫為

$$\int_{t_V} {}_t^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^t V = \int_{t_V} {}_t^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^t V + \int_{t_{A_f}} {}_t^{t+\Delta t} f_i^A \delta u_i^A d^t A \quad (2.27)$$

其中 ${}_t^{t+\Delta t} S_{ij}$ 為 2nd Piola-Kirchhoff 應力張量的卡式分量， ${}_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ 為時間 t 到 $t + \Delta t$

時，參考時間 t 之 Green-Lagrange 應變張量的卡式分量，而 ${}_t^{t+\Delta t} S_{ij}$ 與 ${}_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ 之定義

是將 (2.13) 式與 (2.14) 式之上標及下標符號‘0’，用‘ t ’取而代之，且位移是由時間 t 之狀態開始量測起。

由於 (2.27) 式中，時間 $t + \Delta t$ 時之 2nd Piola-Kirchhoff 應力 ${}_t^{t+\Delta t} S_{ij}$ 與

Green-Lagrange 應變 ${}_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ 未知，故採用下列之增量分解

$${}_t^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}_t S_{ij} \quad (2.28)$$

其中 ${}^t \tau_{ij} = {}_t S_{ij}$ ，而 ${}^t \tau_{ij}$ 為 Cauchy 應力張量的卡式分量， ${}_t S_{ij}$ 為 2nd Piola-Kirchhoff

應力增量參考時間 t 的卡式分量，若考慮 Green-Lagrange 應變增量 ${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ ，則以下關係式皆成立，即

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (2.29)$$

$${}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}_t \boldsymbol{e}_{ij} + {}_t \boldsymbol{\eta}_{ij} \quad (2.30)$$

其中 ${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t x_k}{\partial {}^t x_i} \frac{\partial {}^t x_k}{\partial {}^t x_j} - \delta_{ij} \right) = 0$ ，而 ${}_t \boldsymbol{e}_{ij}$ 和 ${}_t \boldsymbol{\eta}_{ij}$ 分別為對應於時間 t 的線性和非

線性應變增量，其應變增量與位移之關係如下所示

$${}_t \boldsymbol{e}_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t u_{i,j} + {}_t u_{j,i}) \quad (2.31)$$

$${}_t \boldsymbol{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} {}_t u_{k,i} {}_t u_{k,j} \quad (2.32)$$

將(2.28)式與(2.30)式代入(2.15)式可得

$$\begin{aligned} & \int_{t_V} {}_t S_{ij} \delta {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} d^t V + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \boldsymbol{\eta}_{ij} d^t V \\ &= \int_{t_V} {}^{t+\Delta t}_t f_i^B \delta u_i d^t V + \int_{t_{A_f}} {}^{t+\Delta t}_t f_i^A \delta u_i^A d^t A - \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \boldsymbol{e}_{ij} d^t V \end{aligned} \quad (2.33)$$

上式表示採用 U.L. formulation 含增量分解之虛功原理方程式。

由於(2.33)式中 $\delta {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ 含非線性之位移增量，故無法直接求解，若使用泰勒展開式進行線性化，則線性化之近似解如下所示

$$\begin{aligned} & \int_{t_V} {}_t S_{ij} \delta {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} d^t V \\ &= \int_{t_V} \left[\frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{rs}} \bigg|_t ({}_t \boldsymbol{e}_{rs} + {}_t \boldsymbol{\eta}_{rs}) + \text{higher order terms} \right] \delta ({}_t \boldsymbol{e}_{ij} + {}_t \boldsymbol{\eta}_{ij}) d^t V \end{aligned} \quad (2.34)$$

若忽略(2.34)式中之非線性項及高階項，並利用下列之本構關係式

$${}_t S_{ij} = {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \quad (2.35)$$

則 U.L. formulation 之虛功原理方程式經線性化後，可改寫如下

$$\int_{t_V} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t \boldsymbol{e}_{ij} d^t V + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}_t \boldsymbol{\eta}_{ij} d^t V$$

$$= \int_{t_V}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^t V + \int_{t_{A_f}}^{t+\Delta t} f_i^A \delta u_i^A d^t A - \int_{t_V}^t \tau_{ij} \delta e_{ij} d^t V \quad (2.36)$$

在 U.L. formulation 中，(2.36) 式可用來計算位移增量，再計算相對於時間 $t + \Delta t$ 時之位移、應變及應力之近似解。

2.6 應變能密度

應變能密度之定義為物體每單位體積儲存之總能量，由於是以能量作為考量，所以不需考慮材料之種類、尺寸大小及負荷形式，可用於預測破裂之發生，若假設材料為連體，當其受到負荷時，每單位體積之應變能可由下式求得

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.37)$$

其中 σ_{ij} 和 ε_{ij} 分別為材料之應力及應變分量。

在彈塑性材料中應變能密度可分為彈性及塑性兩部份

$$\frac{dW}{dV} = \frac{dW^e}{dV} + \frac{dW^p}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.38)$$

而應變能密度理論用於預測破裂或降伏，如圖 2-6 所示，是基於以下的假設[11]：

(1) 於圖 2-6 中， $(dW/dV)_{\max}$ 為應變能密度函數之相對較大值，當所

有 $(dW/dV)_{\max}$ 中之最大值 $(dW/dV)_{\max}^{\max}$ 達到降伏臨界值

$(dW/dV)_d$ 時，則 $(dW/dV)_{\max}^{\max}$ 發生之位置將開始降伏。

(2) 於圖 2-6 中， $(dW/dV)_{\min}$ 為應變能密度函數之相對較小值，當所

有 $(dW/dV)_{\min}$ 中之最大值 $(dW/dV)_{\min}^{\max}$ 達到破裂臨界值

$(dW/dV)_c$ 時，則 $(dW/dV)_{\min}^{\max}$ 發生之位置將開始破裂。

其中破裂之臨界值 $(dW/dV)_c$ ，可經由材料單軸拉伸試驗之真應力—真應變曲線下之面積求得。

2.7 破裂的三種模式

對於某些承受外力之破裂結構而言，可推導出結構內應力之封閉形式，假設一等向線性彈性之無限板，包含長 $2a$ 之裂縫，在無窮遠處承受均勻之應力 σ ，

並定義極座標之原點位於裂縫尖端，如圖 2-7 所示，則此裂縫尖端附近之應力場可表示為[13]

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2.39)$$

其中 σ_{ij} 為應力張量， k 為常數， r 為裂縫尖端到鄰近裂縫尖端一點之距離， θ 為 x 軸逆時針旋轉到該點之角度， f_{ij} 為 θ 之無因次函數。

通常裂縫依其負荷之種類可以分為下列三種模式，如圖 2-8 所示，分別為
(1) 模式一：張裂型 (Opening mode)，其負荷垂直施加於裂縫平面，使裂縫曲面對稱地分開，其裂縫尖端之應力場可表示如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

其中 K_I 表示為模式一張裂型之應力強度因子 (Stress Intensity Factor)。

(2) 模式二：滑裂型 (In-plane shear)，即裂縫承受平面內剪負荷，使裂縫自一裂縫曲面滑移開，其裂縫尖端之應力場可表示如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

其中 K_{II} 表示為模式二滑裂型之應力強度因子。

(3) 模式三：剪裂型 (Out-of-plane shear)，即裂縫承受平面外剪負荷，其裂縫尖端之應力場可表示如下

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

其中 K_{III} 表示為模式三剪裂型之應力強度因子，當 K 已知時，將可求解出以 r 、 θ 為函數之應力及應變。

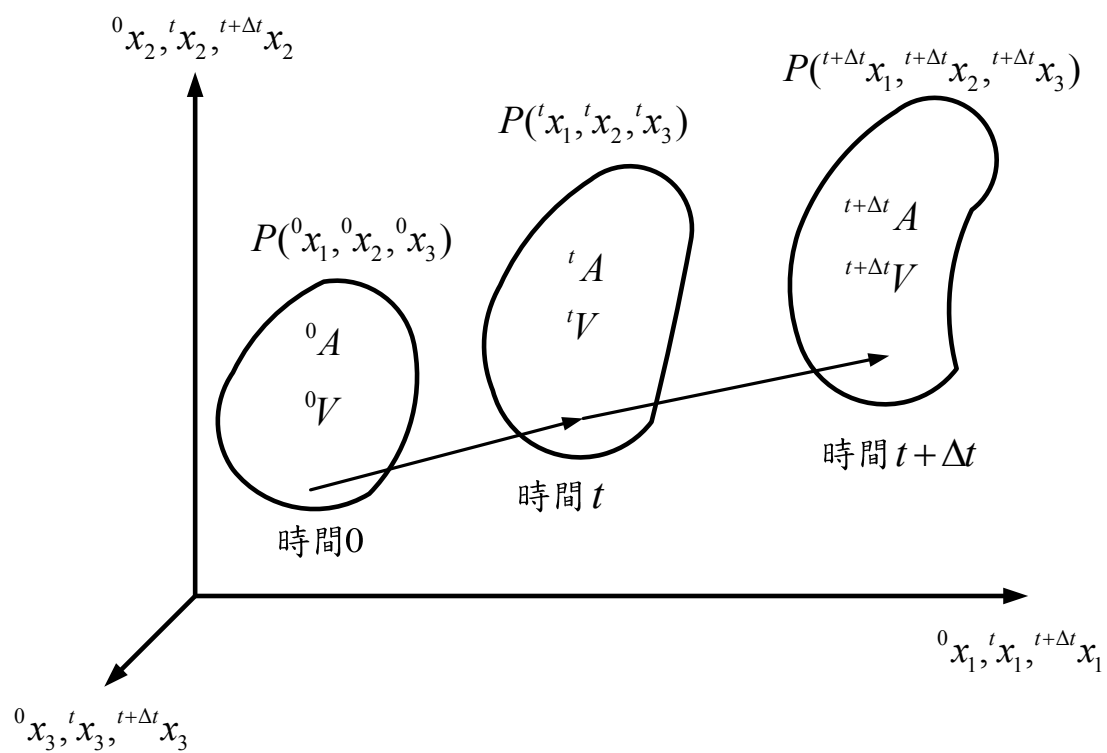


圖 2-1 物體在不同時間狀態於卡式座標系運動之示意圖

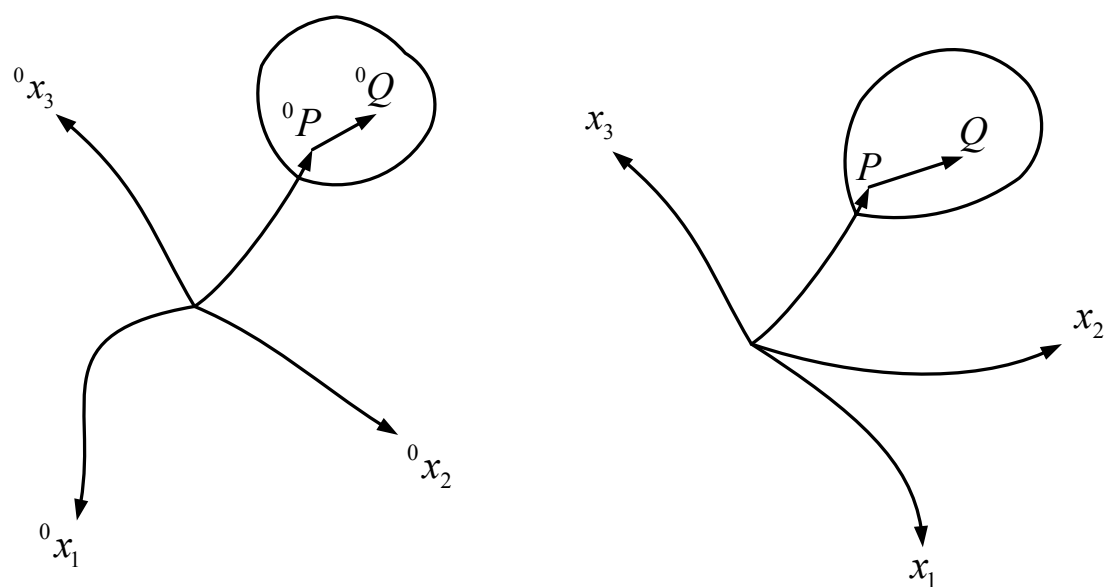


圖 2-2 物體之變形圖

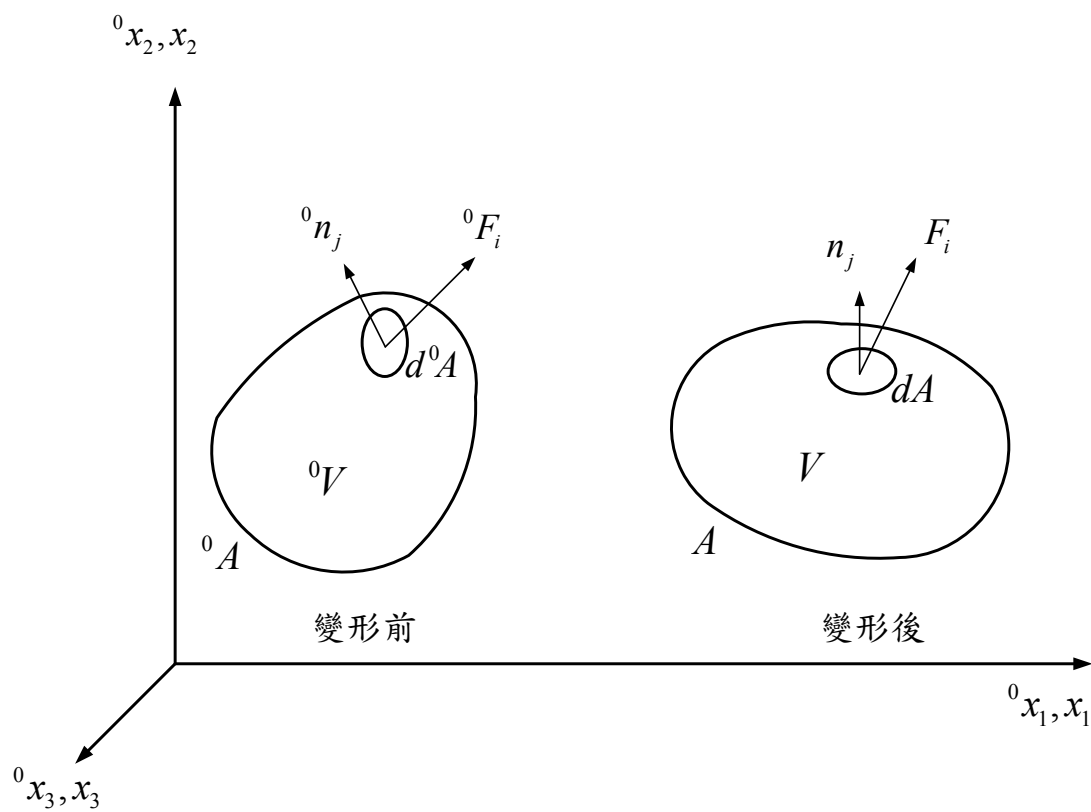


圖 2-3 定義應力之連體

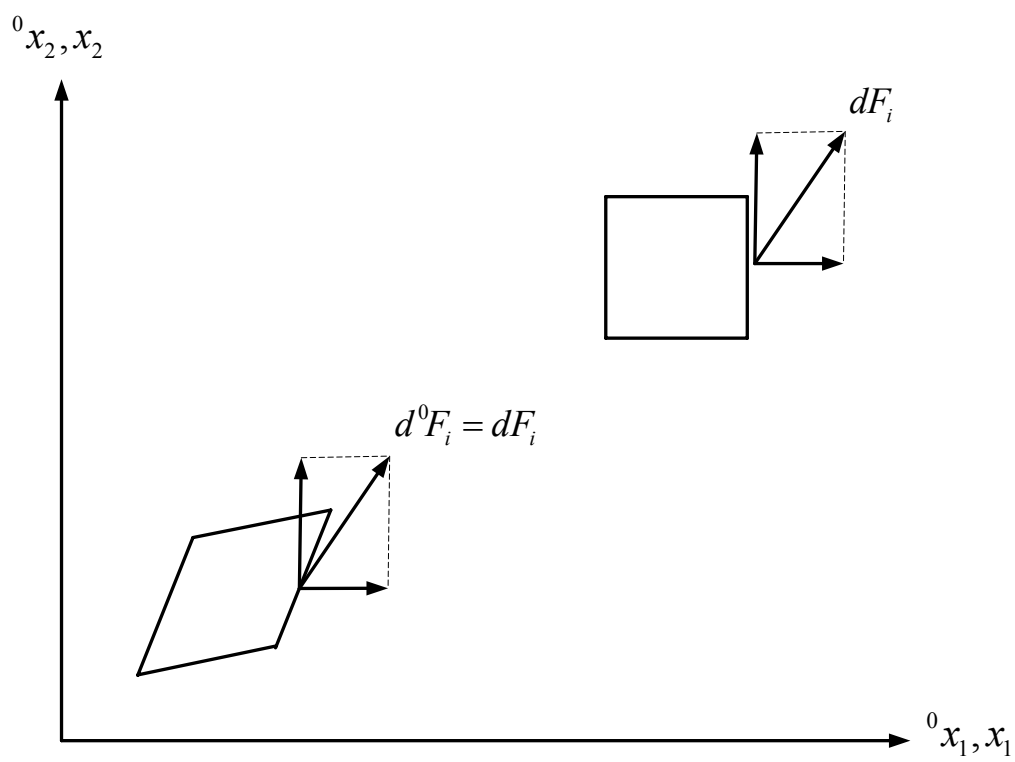


圖 2-4 Lagrange 應力示意圖

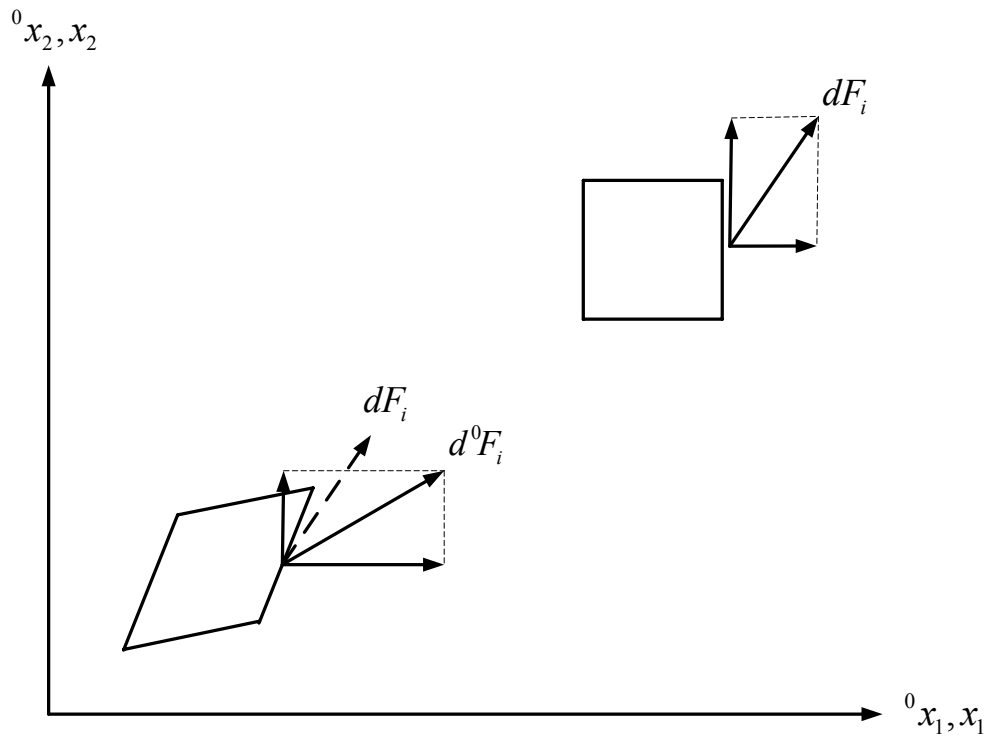


圖 2-5 Kirchhoff 應力示意圖

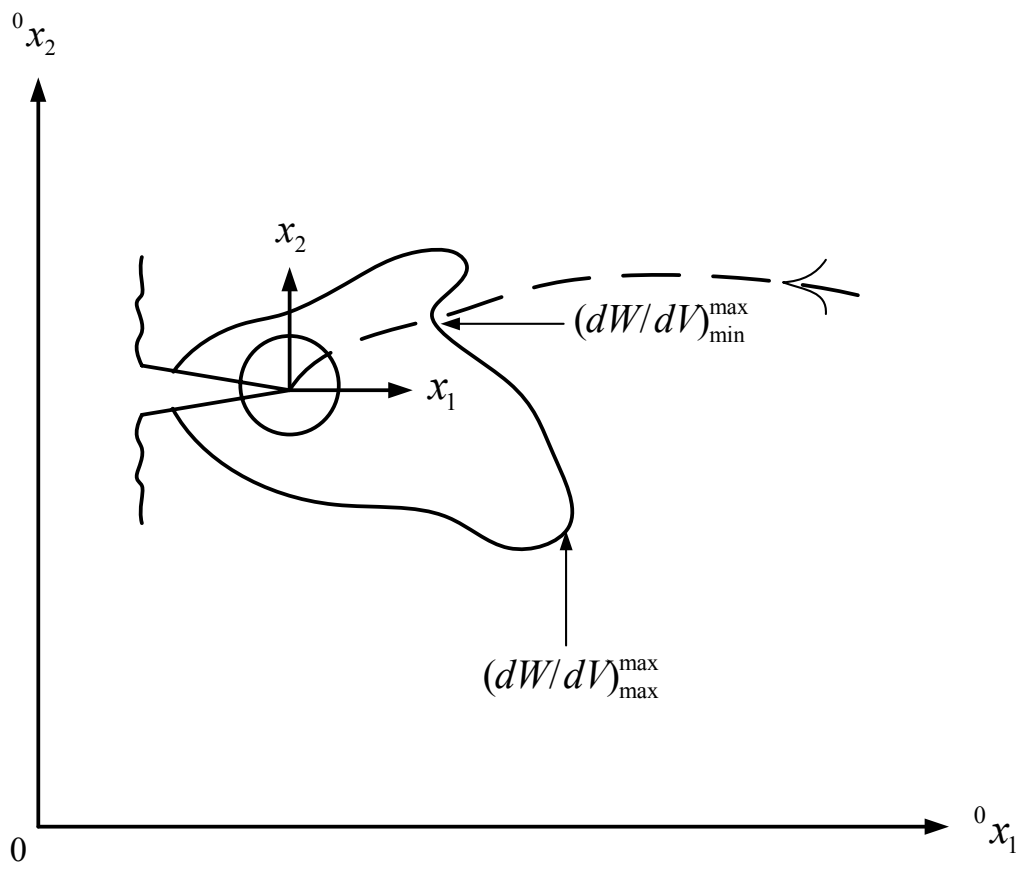


圖 2-6 預測破裂及降伏之應變能密度曲線分佈圖

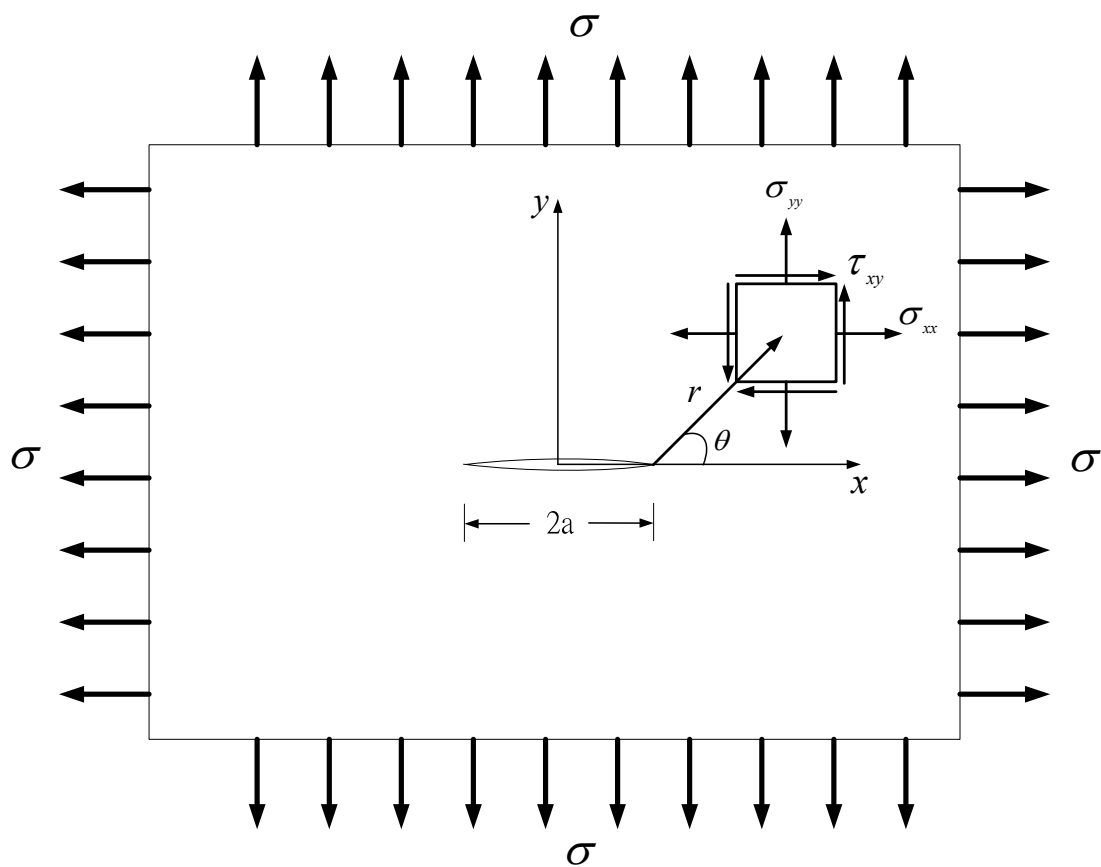
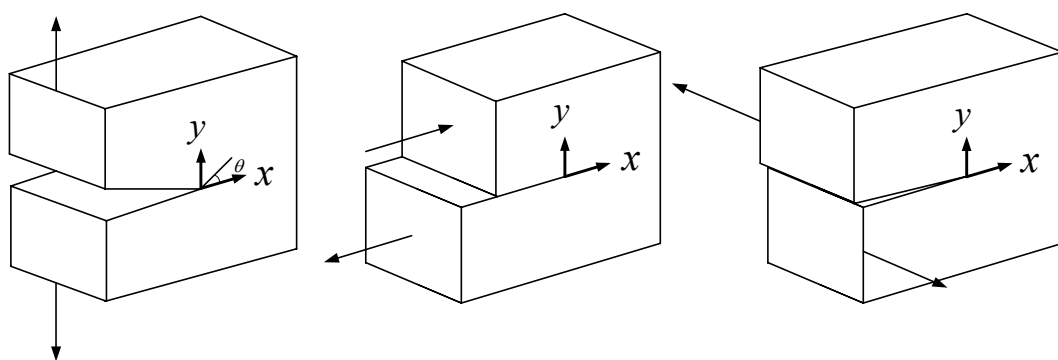


圖 2-7 裂縫尖端之座標定義



模式一：張裂型

模式二：滑裂型

模式三：剪裂型

圖 2-8 破裂之三種模式

三、有限元素分析

3.1 動態有限元素分析

在三維有限元素分析中，若假設一元素其節點座標，在時間 0 及時間 t 時分別為 ${}^0x_i^k$ 及 ${}^tx_i^k$ ，其中 $k=1, \dots, N$ ，而 N 為單一元素的節點總數，若元素之座標與位移，均採用相同的形狀函數，即所謂的同參有限元素分析，則座標之關係可表示如下

$${}^0x_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_i^k \quad {}^tx_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^tx_i^k \quad i=1, 2, 3 \quad (3.1)$$

其中 h_k 為對應於節點 k 的形狀函數。

而元素之位移關係則如下所示

$${}^tu_i = \sum_{k=1}^N h_k {}^tu_i^k \quad u_i = \sum_{k=1}^N h_k u_i^k \quad i=1, 2, 3 \quad (3.2)$$

其中 ${}^tu_i^k$ 為節點 k 於時間 t 在 i 方向的位移。

而應變可由下列之偏微分關係求得

$$\frac{\partial {}^tu_i}{\partial {}^0x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0x_j} \right) {}^tu_i^k \quad i=1, 2, 3; j=1, 2, 3 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial {}^0x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^0x_j} \right) u_i^k \quad i=1, 2, 3; j=1, 2, 3 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^tx_j} \right) u_i^k \quad i=1, 2, 3; j=1, 2, 3 \quad (3.5)$$

首先利用連鎖律建立自然座標 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 與直角座標 ${}^tx_i^k$ 之關係，並表示如下

下

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tx_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial {}^tx_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial {}^tx_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial {}^tx_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^tx_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^tx_2} \\ \frac{\partial}{\partial {}^tx_3} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = {}^t\mathbf{J} \frac{\partial}{\partial {}^t\mathbf{x}} \quad (3.6)$$

其中 ${}^t\mathbf{J}$ 為時間 t 之 Jacobian 運算子，則逆矩陣 ${}^t\mathbf{J}^{-1}$ 關係式可表示如下

$$\frac{\partial}{\partial {}^t\mathbf{x}} = {}^t\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.7)$$

則 (3.3) 式到 (3.5) 式之偏微分關係，可透過 Jacobian 轉換進行計算。

利用 (3.2) 式及 (3.7) 式，計算 $\partial \mathbf{u} / \partial {}^t\mathbf{x}$ ，並建構應變一位移關係矩陣 \mathbf{B} ，即 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ ，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 為元素節點之應變向量， \mathbf{u} 為元素節點之位移向量，而上述應變一位移之關係，將應用在後續 T.L. formulation 和 U.L. formulation 之推導。

3.1.1 Total Lagrangian formulation

在動態分析中，施加之作用力包含慣性力，若物體之質量於分析之過程中視為守恆，並假設時間 0 時為初始的參考狀態，利用有限元素公式來計算元素質量矩陣，若考慮單一元素時，將 (3.1) 式及 (3.2) 式微分，代入 (2.26) 式積分後，若採用 T.L. formulation 之增量平衡方程式可表示如下

$$\left({}^t_0\mathbf{K}_L + {}^t_0\mathbf{K}_{NL} \right) \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R} - {}^t_0\mathbf{F} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

其中 ${}^t_0\mathbf{K}_L$ 為對應於線性應變增量之剛性矩陣， ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$ 為對應於非線性應變增量之剛性矩陣， ${}^t_0\mathbf{F}$ 為等效於元素應力之節點力向量， ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ 為時間 $t + \Delta t$ 時元素節點之加速度向量， \mathbf{M} 為元素質量矩陣，(3.8) 式中的向量 ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}$ 可由 (2.11) 式求得。而 ${}^t_0\mathbf{K}_L\mathbf{u}$ 、 ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}\mathbf{u}$ 及 ${}^t_0\mathbf{F}$ 可分別由有限元素 $\int_{0_V} {}^tC_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} d^0V$ 、 $\int_{0_V} {}^tS_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V$ 和 $\int_{0_V} {}^tS_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V$ 的積分求得，即

$${}^t_0\mathbf{K}_L = \int_{0_V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^0\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L d^0V \quad (3.9)$$

$${}^t_0\mathbf{K}_{NL} = \int_{0_V} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\mathbf{S} {}^t\mathbf{B}_{NL} d^0V \quad (3.10)$$

$${}^t_0\mathbf{F} = \int_{0_V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\mathbf{S}} d^0V \quad (3.11)$$

其中 ${}^t_0\mathbf{B}_L$ 和 ${}^t_0\mathbf{B}_{NL}$ 分別為線性和非線性之應變一位移關係矩陣， ${}^0\mathbf{C}$ 為材料性質之

增量矩陣， ${}^t_0\mathbf{S}$ 和 ${}^t_0\hat{\mathbf{S}}$ 分別為 2nd Piola-Kirchhoff 應力矩陣及其應力向量，而所有的矩陣元素皆在時間 t ，並參考時間 0 的狀態，而在 T.L. formulation 中採用之應變一位移關係矩陣及應力矩陣，如下所示

(1) 應變增量

$${}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i}) + \frac{1}{2}({}^t{}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0u_{k,i} {}^t{}_0u_{k,j}) + \frac{1}{2}({}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j})$$

$$i=1, 2, 3; j=1, 2, 3; k=1, 2, 3 \quad (3.12)$$

$$\text{其中 } {}_0u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} \quad (3.13)$$

(2) 線性應變－位移關係矩陣

$$\text{利用 } {}_0\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \mathbf{u} \quad (3.14)$$

$$\text{其中 } {}_0\mathbf{e}^T = [{}_0e_{11} \quad {}_0e_{22} \quad {}_0e_{33} \quad 2{}_0e_{12} \quad 2{}_0e_{23} \quad 2{}_0e_{31}] \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \cdots u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N] \quad (3.16)$$

$${}^t\mathbf{B}_L = {}^t\mathbf{B}_{L0} + {}^t\mathbf{B}_{L1} \quad (3.17)$$

$${}^t\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \cdots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,3} & 0 & \cdots & {}_0h_{N,3} \\ {}_0h_{1,2} & {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,3} & {}_0h_{1,2} & 0 & \cdots & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,3} & 0 & {}_0h_{1,1} & {}_0h_{2,3} & \cdots & {}_0h_{N,1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\text{其中 } {}_0h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial^0 x_j} \quad (3.19)$$

$$u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^t u_j^k \quad (3.20)$$

$${}^t\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} l_{11} {}_0h_{1,1} & l_{21} {}_0h_{1,1} & l_{31} {}_0h_{1,1} \\ l_{12} {}_0h_{1,2} & l_{22} {}_0h_{1,2} & l_{32} {}_0h_{1,2} \\ l_{13} {}_0h_{1,3} & l_{23} {}_0h_{1,3} & l_{33} {}_0h_{1,3} \\ (l_{11} {}_0h_{1,2} + l_{12} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,2} + l_{22} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,2} + l_{32} {}_0h_{1,1}) \\ (l_{12} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,2}) & (l_{22} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,2}) & (l_{32} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,2}) \\ (l_{11} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,1}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & {}_0h_{2,1} & \cdots & l_{31} & {}_0h_{N,1} \\ l_{12} & {}_0h_{2,2} & \cdots & l_{32} & {}_0h_{N,2} \\ l_{13} & {}_0h_{2,3} & \cdots & l_{33} & {}_0h_{N,3} \\ (l_{11} & {}_0h_{2,2} + l_{12} & {}_0h_{2,1}) & \cdots & (l_{31} & {}_0h_{N,2} + l_{32} & {}_0h_{N,1}) \\ (l_{12} & {}_0h_{2,3} + l_{13} & {}_0h_{2,2}) & \cdots & (l_{32} & {}_0h_{N,3} + l_{33} & {}_0h_{N,2}) \\ (l_{11} & {}_0h_{2,3} + l_{13} & {}_0h_{2,1}) & \cdots & (l_{31} & {}_0h_{N,3} + l_{33} & {}_0h_{N,1}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\text{其中 } l_{ij} = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,j} {}^t u_i^k \quad (3.22)$$

(3) 非線性應變－位移關係矩陣

$${}^t \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{NL} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\text{其中 } {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \cdots & {}_0h_{N,1} \\ {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & {}_0h_{2,2} & \cdots & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,3} & 0 & 0 & {}_0h_{2,3} & \cdots & {}_0h_{N,3} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

(4) 2nd Piola-Kirchhoff 應力矩陣及向量

$${}^t \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix}; \quad {}^t \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t S_{11} \\ {}^t S_{22} \\ {}^t S_{33} \\ {}^t S_{12} \\ {}^t S_{23} \\ {}^t S_{31} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\text{其中 } {}^t \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t S_{11} & {}^t S_{12} & {}^t S_{13} \\ {}^t S_{21} & {}^t S_{22} & {}^t S_{23} \\ {}^t S_{31} & {}^t S_{32} & {}^t S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.1.2 Updated Lagrangian formulation

同樣地，將 (3.1) 式及 (3.2) 式微分，代入 (2.36) 式積分後，則單一元素之 U.L. formulation 增量平衡方程式可表示如下

$$\left({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL}\right)\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.27)$$

其中 ${}^t\mathbf{K}_L$ 為對應於線性應變增量之剛性矩陣、 ${}^t\mathbf{K}_{NL}$ 為對應於非線性應變增量之

剛性矩陣， ${}^t\mathbf{F}$ 為等效於元素應力之節點力向量， ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ 為在時間 $t + \Delta t$ 時元素節

點之加速度向量， \mathbf{M} 為元素質量矩陣，而 (3.27) 式中的向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ 可由 (2.11)

式求得。 ${}^t\mathbf{K}_L\mathbf{u}$ 、 ${}^t\mathbf{K}_{NL}\mathbf{u}$ 及 ${}^t\mathbf{F}$ 可分別由有限元素 $\int_{t_V} {}^tC_{ijrs} {}^te_{rs} \delta {}^te_{ij} d^tV$ 、

$\int_{t_V} {}^t\tau_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} d^tV$ 和 $\int_{t_V} {}^t\tau_{ij} \delta {}^te_{ij} d^tV$ 的積分求得，即

$${}^t\mathbf{K}_L = \int_{t_V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L d^tV \quad (3.28)$$

$${}^t\mathbf{K}_{NL} = \int_{t_V} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t\mathbf{B}_{NL} d^tV \quad (3.29)$$

$${}^t\mathbf{F} = \int_{t_V} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} d^tV \quad (3.30)$$

其中， ${}^t\mathbf{B}_L$ 和 ${}^t\mathbf{B}_{NL}$ 分別為線性和非線性應變一位移關係矩陣， ${}^t\mathbf{C}$ 為材料性質增量矩陣，而 ${}^t\boldsymbol{\tau}$ 和 ${}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 分別為時間 t 時之 Cauchy 應力矩陣及其應力向量，而在 U.L. formulation 中採用之應變一位移關係矩陣及應力矩陣，如下所示

(1) 應變增量

$${}^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}^tu_{i,j} + {}^tu_{j,i}) + \frac{1}{2}({}^tu_{k,i} - {}^tu_{k,j})$$

$$i=1, 2, 3; j=1, 2, 3; k=1, 2, 3 \quad (3.31)$$

$$\text{其中 } {}^tu_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_j} \quad (3.32)$$

(2) 線性應變一位移關係矩陣

$$\text{利用 } {}^t\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \hat{\mathbf{u}} \quad (3.33)$$

$$\text{其中 } {}^t\mathbf{e}^T = [{}^te_{11} \quad {}^te_{22} \quad {}^te_{33} \quad 2{}_te_{12} \quad 2{}_te_{23} \quad 2{}_te_{31}] \quad (3.34)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \cdots u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N] \quad (3.35)$$

$${}^t\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} {}^th_{1,1} & 0 & 0 & {}^th_{2,1} & \cdots & 0 \\ 0 & {}^th_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {}^th_{1,3} & 0 & \cdots & {}^th_{N,3} \\ {}^th_{1,2} & {}^th_{1,1} & 0 & {}^th_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & {}^th_{1,3} & {}^th_{1,2} & 0 & \cdots & {}^th_{N,2} \\ {}^th_{1,3} & 0 & {}^th_{1,1} & {}^th_{2,3} & \cdots & {}^th_{N,1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\text{其中 } {}^th_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^tx_j} \quad (3.37)$$

$$u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^tu_j^k \quad (3.38)$$

$N = \text{節點之數量}$

(3) 非線性應變－位移關係矩陣

$${}^t\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t\widetilde{\mathbf{B}}_{NL} & \widetilde{\mathbf{0}} & \widetilde{\mathbf{0}} \\ \widetilde{\mathbf{0}} & {}^t\widetilde{\mathbf{B}}_{NL} & \widetilde{\mathbf{0}} \\ \widetilde{\mathbf{0}} & \widetilde{\mathbf{0}} & {}^t\widetilde{\mathbf{B}}_{NL} \end{bmatrix}; \quad \widetilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\text{其中 } {}^t\widetilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^th_{1,1} & 0 & 0 & {}^th_{2,1} & \cdots & {}^th_{N,1} \\ {}^th_{1,2} & 0 & 0 & {}^th_{2,2} & \cdots & {}^th_{N,2} \\ {}^th_{1,3} & 0 & 0 & {}^th_{2,3} & \cdots & {}^th_{N,3} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

(4) Cauchy 應力矩陣和應力向量

$${}^t\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t\widetilde{\boldsymbol{\tau}} & \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & {}^t\widetilde{\boldsymbol{\tau}} & \overline{\mathbf{0}} \\ \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{0}} & {}^t\widetilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}; \quad {}^t\hat{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} \\ {}^t\tau_{22} \\ {}^t\tau_{33} \\ {}^t\tau_{12} \\ {}^t\tau_{23} \\ {}^t\tau_{31} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\text{其中 } {}^t\widetilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} {}^t\tau_{11} & {}^t\tau_{12} & {}^t\tau_{13} \\ {}^t\tau_{21} & {}^t\tau_{22} & {}^t\tau_{23} \\ {}^t\tau_{31} & {}^t\tau_{32} & {}^t\tau_{33} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

3.2 顯性時間積分法(Explicit Time Integration)

非線性動態分析中，中央差分法(Central Difference Method)為普遍使用之顯性時間積分法，當採用中央差分法時，是假設加速度 ${}^t\ddot{\mathbf{u}}$ 與速度 ${}^t\dot{\mathbf{u}}$ 如下所示

$${}^t\ddot{\mathbf{u}} = \frac{({}^{t-\Delta t}\mathbf{u} - 2{}^t\mathbf{u} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\Delta t^2} \quad (3.43)$$

$${}^t\dot{\mathbf{u}} = \frac{(-{}^{t-\Delta t}\mathbf{u} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{2\Delta t} \quad (3.44)$$

當在 U.L. formulation 中採用顯性時間積分時，為求解時間 $t + \Delta t$ 之位移 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ ，故考慮時間 t 時有限元素系統之平衡狀態，其方程式可表示如下

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{u}} = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} \quad (3.45)$$

將(3.43)式與(3.44)式之加速度 ${}^t\ddot{\mathbf{u}}$ 與速度 ${}^t\dot{\mathbf{u}}$ 代入(3.45)式後，則可得

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} (2{}^t\mathbf{u} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{u}) \quad (3.46)$$

上式將可用來求解時間 $t + \Delta t$ 之位移 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ 。

在使用顯性時間積分法時，在時間步階上有嚴格之限制，為了求解穩定，時間步階 Δt 需要小於臨界值 Δt_{cr} ，其關係如下所示

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \leq \frac{L_e}{c} \quad (3.47)$$

其中 L_e 為網格分割之元素中任意兩節點的最小距離，而 c 為波速。

3.3 顯性動態有限元素計算程序

有限元素之計算程序如下

- (1) 利用電腦輔助繪圖軟體繪置出模具、料片的外形，並加以網格分割，給定邊界條件，完成前處理。
- (2) 決定形狀函數及質量矩陣。
- (3) 計算材料構成式矩陣，並在數值分析中，使用高斯積分法計算節點內力 \mathbf{F} ，再由 Penalty 法計算節點外力 \mathbf{R} 。
- (4) 採取中央差分法，計算節點下一個時間步階之位移得到節點之位移增量。
- (5) 再由節點的位移增量，配合材料的構成式，求出應力增量及應變增量，並更新節點座標與應力。

(6) 重複 (3) 到 (5) 的計算過程，直到分析結束。
而完整之顯性動態有限元素分析流程，如圖 3-1 所示。

3.4 模具曲面與彈性棒之描述

模具曲面基本上可由平面、圓柱面、球面、圓錐面，及圓環面所組成，每一曲面由九個節點來描述，如圖 3-2 所示，同時於程式中亦建構每一工具面之邊界面，分別為 $\pi 1$ 、 $\pi 2$ 、 $\pi 3$ ，及 $\pi 4$ 平面，且利用 $\pi 1$ 、 $\pi 2$ 、 $\pi 3$ ，及 $\pi 4$ 平面來包圍每個模具曲面。

在判斷料片之節點與模具曲面之接觸時，本計畫發展彈性棒元素加以處理，亦即當料片沿著模具曲面成形時，在料片節點與模具曲面之曲率中心間建立彈性棒，如圖 3-3 所示，在第 $(k-1)$ 步階時，料片之 P 點與模具曲面未接觸，於第 k 步階時， P 點卻位移至模具內，則連接 P 點與曲率中心 Q 建立彈性棒，並沿 PQ 方向得到與模具表面接觸點 H 後，彈性棒之變形量即為 $H_k P_k$ ，其後在第 $(k+1)$ 步階時， P 點沿模具表面變形至 H_{k+1} 處，利用此方式，彈性棒除可時時保持垂直模具表面外，沖頭負荷則可由與模具接觸之節點力總合求得。

3.5 接觸力的推算

在顯性動態有限元素法中，將推導出 Penalty 法則，來求得滿足和模具曲面接觸的邊界條件。如圖 3-4 所示，其計算步驟如下

(i) 接觸點之搜尋

搜尋是否有節點 α 在模具內部。

(ii) 接觸點之法線力

計算節點 α 進入模具的陷入量 g 的值，將此值乘上 Penalty 數，可決定出法線方向的接觸力 P_n ，如下所示

$$P_n = \Psi \|g\| n \quad (3.48)$$

此時，利用陷入量 g ，如圖 3-5 所示，可以推出垂直方向分量 g_z 、法線方向分量 g_n 以及到模具表面之最短距離 g_m ，一般為了求出最短距離必須反覆的計算，因此，經常採用規定方向的陷入量來計算。而 Ψ 為 Penalty 數，當此值很大時可以提高解的精確度，但是在計算中會有發散的情形，所以必須將時間增量更加縮小，其定義如下所示

$$\Psi = \frac{A_e E}{l} \quad (3.49)$$

其中 A_e 為元素之面積， l 為元素中最長的邊， E 為工具的彈性係數。

(iii) 接觸點之切線力

與模具接觸之節點力分為法線力與切線力，其中切線力為摩擦阻力，由於在成形過程中，節點與模具間有可能產生滑動或停滯，為了克服此節點接觸摩擦力

之問題，在庫倫摩擦法則下，將以下列判斷式來求得節點摩擦力 \mathbf{P}_t 。

$$\mathbf{P}_t = \begin{cases} \mathbf{F}_t, & \left(\dot{\mathbf{u}}_t = \ddot{\mathbf{u}}_t = 0, \|\mathbf{F}_t\| \leq \mu \|\mathbf{P}_n\| \right) \\ \mu \|\mathbf{P}_n\| \frac{\mathbf{F}_t}{\|\mathbf{F}_t\|}, & \left(\dot{\mathbf{u}}_t = \ddot{\mathbf{u}}_t = 0, \|\mathbf{F}_t\| > \mu \|\mathbf{P}_n\| \right) \\ \mathbf{F}_t - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t, & \left(\dot{\mathbf{u}}_t = 0, \ddot{\mathbf{u}}_t \neq 0, \|\mathbf{F}_t - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t\| \leq \mu \|\mathbf{P}_n\| \right) \\ -\mu \|\mathbf{P}_n\| \frac{\ddot{\mathbf{u}}_t}{\|\ddot{\mathbf{u}}_t\|}, & \left(\dot{\mathbf{u}}_t = 0, \ddot{\mathbf{u}}_t \neq 0, \|\mathbf{F}_t - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t\| > \mu \|\mathbf{P}_n\| \right) \\ -\mu \|\mathbf{P}_n\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\|\dot{\mathbf{u}}_t\|}, & \left(\dot{\mathbf{u}}_t \neq 0 \right) \end{cases} \quad (3.51)$$

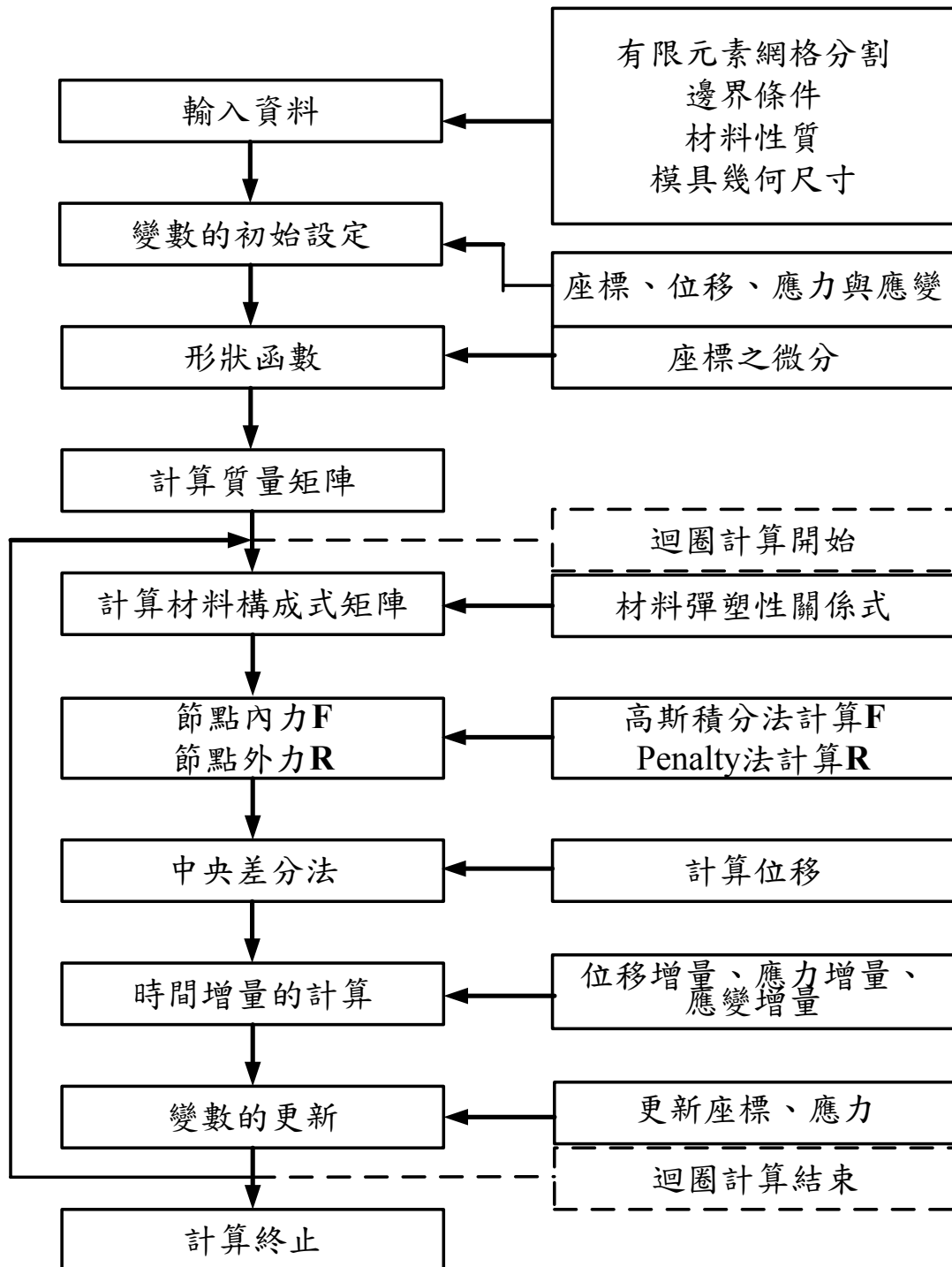
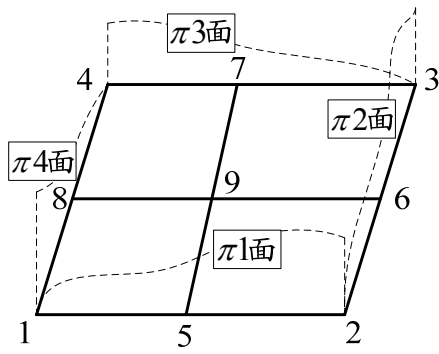
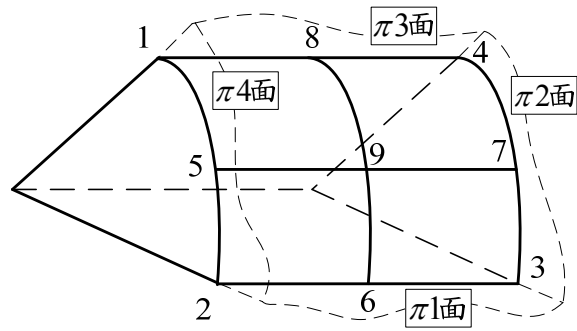


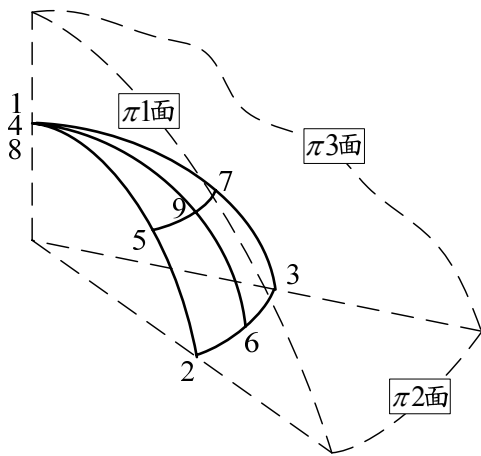
圖 3-1 顯性動態有限元素分析之流程圖



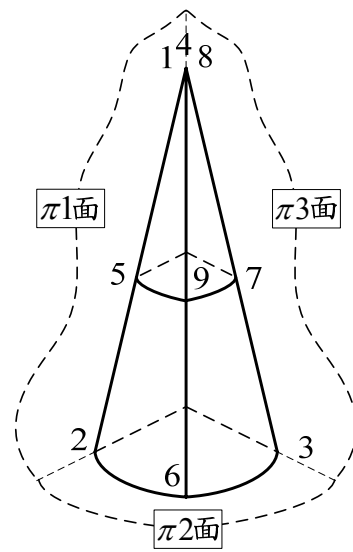
(a) 平面



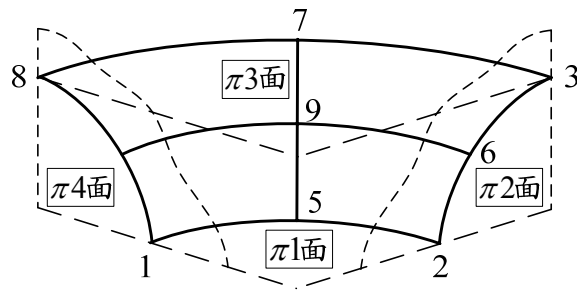
(b) 圓柱面



(c) 球面



(d) 圓錐面



(e) 圓環面

圖 3-2 模具曲面之定義

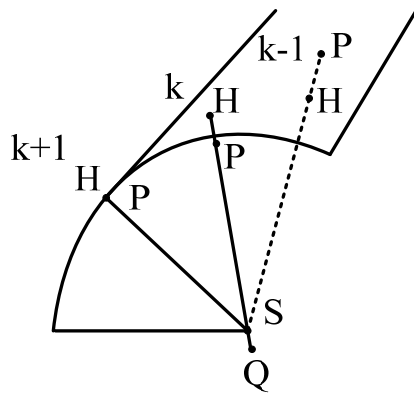


圖 3-3 料片節點與模具之接觸判斷

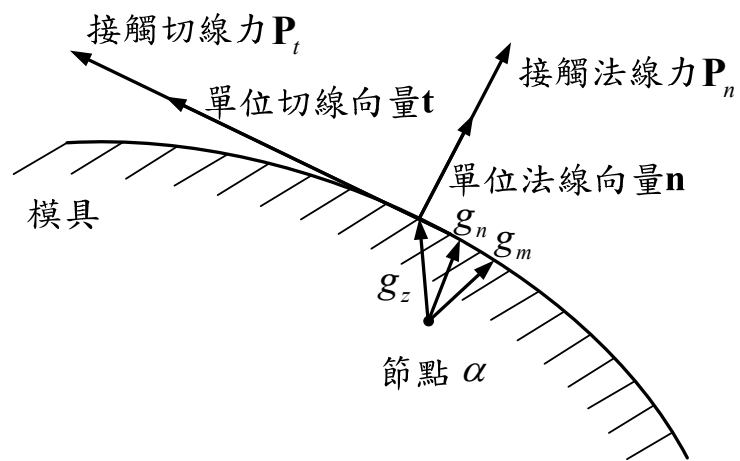


圖 3-4 Penalty 法計算節點之外力

四、方杯拉伸成形之實驗與數值分析

4.1 實驗設備

本計畫所採用之實驗設備包含一部五十噸的液壓成形機、iNet-100HC 資料擷取盒，及個人電腦，其中個人電腦包含 LabVIEW 8.0 圖控式資料擷取軟體和 iNet-200 資料擷取卡。圖 4-1 為實驗設備之整體系統配置圖，經由資料擷取設備擷取之資料，將透過螢幕即時顯示成形過程中沖頭負荷及相對之衝程關係。

本計畫設計一組方杯拉伸成形實驗的模具，其中包含方形沖頭、壓料板和沖模，其配置如圖 4-2 所示，模具幾何尺寸則如圖 4-3 所示，實驗使用之沖頭和沖頭固定底座如圖 4-4 所示、沖模如圖 4-5 所示，壓料板如圖 4-6 所示，而方杯拉伸實驗料片如圖 4-7 所示。將模具裝置在五十噸的液壓成形機上，並進行模具之校正，以確保各模具參考座標軸之位置在同一中心。

4.2 實驗原理與步驟

實驗操作過程可分成以下幾個階段：

1. 將主壓缸及緩衝缸負載感測器之輸出線路，分別連接到 iNet-100HC 之資料擷取盒中，以便將液壓缸壓力的類比訊號轉換為數位訊號輸入個人電腦，將其電壓值轉換成負荷值後，再儲存於個人電腦中。
2. 而主壓缸及緩衝缸之位移可藉由雷射位移計的線路，透過電纜線，連接到 iNet-100HC 資料擷取器，來記錄加工行程之變化。
3. 上述主壓缸和緩衝缸負荷與位移數據，皆透過 LabVIEW 圖控式資料擷取軟體，連續記錄於檔案中，並且在電腦螢幕上即時顯示主壓缸位移的實際加工行程及主壓缸與緩衝缸之負荷變化。

實驗主要程序如下：

1. 將鋼板以線切割機裁切成，長 150.00mm 之正方形料片，並於電子顯微鏡上觀察料片之金相組織，以了解金屬板片的軋軋方向。
2. 將模具組裝在液壓成形機上，並以厚薄規校正沖頭與沖模之間隙，以確定模具處於同一中心。
3. 將料片與沖頭相接觸的區域，分別均勻塗上薄層硬脂酸鋅粉 $[\text{Zn}(\text{C}_{18}\text{H}_{35}\text{O}_2)]$ 之乾式潤滑劑。
4. 先於壓料板上標定料片擺放之正確位置，並將料片放置在壓料板標定位置之表面上，最後為了再一次的確保料片與壓料板位於同一座標軸上，分別將料片與壓料板之外徑距離相減後的二分之一差值設定於游標卡尺上，此時再以游標卡尺定位的方式，使料片的四邊與壓料板等距，如此便可確保料片與壓料板於同一中心。

5. 下降主壓缸加壓料片，並使沖頭平均以 0.59mm/sec 的速度，將料片拉伸成形。
6. 本實驗之模具與料片尺寸大小固定，以長 150.00mm 之正方形料片來做實驗，採用數值模擬發生破裂時之沖頭衝程 13.20mm 為初始實驗之沖頭衝程，若料片尚未破裂，則增加 0.05m 重做實驗當料片已破裂時，再從破裂之衝程，減少 0.05m 重做實驗，以便找出破裂與頸縮之衝程。
7. 經由個人電腦及資料擷取設備，即時記錄實驗過程中的沖頭負荷與衝程之關係。
8. 將不同的料片重複實驗步驟 1 至 7。
9. 使用線切割機將工件從中心對稱位置切割成兩片，來進行工件厚度之量測。
10. 利用 Auto-CAD 軟體繪製間隔為 1.00mm 之紙尺，在工件沿軋軋方向夾 0 度角及 45 度角之方向黏貼，再使用尖點量測分厘卡，量取工件各位置之厚度值，分厘卡之量測精度為 0.01mm。

4.3 邊界條件

本計畫之方杯拉伸製程，由於料片、沖頭、壓料板及沖模在幾何外形上具對稱性，而為節省電腦運算時間，因此以四分之一進行分析，圖 4-8 顯示方杯拉伸成形四分之一正方形料片之網格分割與邊界條件設定，圖中雙箭號為旋轉拘束，單箭號為位移拘束，三箭號為完全拘束，在 X 軸上的節點為 X 和 Z 方向旋轉拘束，Y 方向為位移拘束，而 Y 軸上的節點為 Y 和 Z 方向旋轉拘束，X 方向為位移拘束，在料片之外緣輪廓則是 XYZ 軸完全拘束。

4.4 材料參數

本計畫於方杯拉伸製程中所採用之料片，係由中國鋼鐵股份有限公司所提供 JIS G3141 SPCEN-SD(DDQ)鋼板，經由拉伸試驗所得之數據，再利用最小平方法求得鋼板之應力—應變特性曲線方程式，其材料參數如下所示：

料片初始厚度： $t = 0.8\text{mm}$

降伏應力： $\sigma_y = 148.5\text{ MPa}$

應力與應變關係式： $\bar{\sigma} = 452.00(0.00738 + \bar{\varepsilon}_p)^{0.2295}\text{ MPa}$

楊氏係數： $E = 2.1 \times 10^5\text{ MPa}$

浦松比： $\nu = 0.3$

拉伸試片破斷面厚度： $t_f = 0.44\text{mm}$

臨界破裂應變能密度：140MPa

4.5 數值模擬分析

利用本計畫之三維顯性動態有限元素程式分析方杯拉伸成形時，在前處理部份，首先依照模具之尺寸，建構三維實體模型，而本計畫中所探討之方杯拉伸成形，由於模具與料片之幾何外形均為軸對稱，故在分析時僅採取四分之一進行數值模擬，以節省 CPU 之運算時間。邊長 150.00mm 之正方形料片，有限元素網格分割是採用八節點實體元素，經網格分割後，節點數量為 3844 個，元素數量為 900 個，模具之有限元素網格分割是採用九節點殼元素，其模具與料片之網格分割數據如表 4-1 所示。圖 4-9 至圖 4-11 分別為方杯拉伸之壓料板、沖模，及沖頭之元素網格分割。

前述模具和料片的建構與元素網格分割皆由 I-DEAS 軟體處理，並經由本計畫所發展之顯性動態有限元素分析程式進行數值模擬，再由 I-DEAS 軟體顯示數值模擬所得之變形及破裂裂紋成長歷程圖與等效應力、應變圖，最後利用一組方形模具來進行方杯拉伸實驗，以改變沖頭衝程的方式，來觀察其破裂裂紋成長情況。在拉伸過程中，工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處會受到最大拉伸應力，此雙軸向拉伸應力將使得工件此角隅處的厚度明顯的薄化，而破裂裂紋亦從此處開始發生。

4.6 數值分析與實驗結果之比較

為了瞭解料片在拉伸過程中之變形歷程、成形極限之臨界衝程及破裂後之成形歷程，以及不同模具幾何外形條件對於方杯拉伸成形之之影響，本計畫設計一組方形沖模進行方杯拉伸實驗，而在數值模擬方面是採用等向性材料參數進行分析，並將數值模擬結果與實驗結果作比較，以確認數值模擬之正確性。

4.6.1 方杯拉伸成形歷程之比較

在方杯拉伸成形中，為瞭解工件在拉伸過程之成形歷程，及達到成形極限之臨界衝程，本節於沖頭底邊圓弧角半徑及沖模平行邊入模圓弧角半徑皆固定為 R6.00mm 之條件下，進行方杯拉伸之模擬，在增量為 0.001mm，密度為 $7.78 \times 10^{-6} \text{kg/mm}^3$ ，彈性棒面積 0.003mm^2 ，破裂應變能密度為 140MPa 等參數設定下，變形圖輸出之增量為 0.02mm，原始料片網格分割後之節點一共為 3844 個。此節中破裂的發生，是經由材料拉伸試驗得到之應力—應變曲線下之面積，

即應變能密度來判斷，當節點於每一步階累積之應變能密度，達到材料之臨界破裂應變能密度時，將發生節點分離即破裂，數值模擬中，當沖頭衝程達 4.00mm 時，其變形圖如圖 4-12 所示；當沖頭衝程達 8.00mm 時，其變形圖如圖 4-13 所示；當沖頭衝程達 11.79mm 時，其變形圖如圖 4-14 所示；圖 4-15 為沖頭衝程達 11.791mm 時，工件沿輥軋方向夾 45 度角隅處局部放大之變形圖，此時節點 1803 之應變能密度為 139.984MPa，由於節點 1803 並未達到臨界破裂應變能密度值 140MPa，所以尚未發生破裂；而模擬之沖頭衝程達 11.792mm 時，節點 1803 之應變能密度值為 140.004MPa，由於已達到設定之破裂應變能密度 140MPa，所以在工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，並新增第 3845 節點，而工件沿輥軋方向夾 45 度角隅處局部放大之變形圖，如圖 4-16 所示，此時節點總數為 3845 個。破裂前、後節點 1802、1803、3845 之座標關係，如表 4-2 所示，當沖頭衝程為 11.791mm 時，尚未發生破裂，而在沖頭衝程為 11.792mm 時，節點 3845，從節點 1803 發生張裂分離，自節點 1803 之位置，沿 x 方向移動-0.01mm，當沖頭衝程達 11.94mm 時，此時節點 1679 之應變能密度值為 140.006MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並在工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增第 3846 節點，其局部放大之變形圖，如圖 4-17 所示；沖頭衝程達 12.40mm 時，節點 1802 之應變能密度值為 140.015MPa，達到臨界破裂應變能密度 140MPa 後，於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，並新增第 3847 節點，其局部放大之變形圖，如圖 4-18 所示；當沖頭衝程達 12.48mm 時，節點 1678 及 1675 之應變能密度值分別為 140.018MPa 及 140.07MPa，達到臨界破裂應變能密度 140MPa 後，在工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點為 3848 及 3849，其局部放大之變形圖，如圖 4-19 所示；當沖頭衝程達 12.52mm 時，節點 1927 及 1807 之應變能密度值分別為 140.073MPa 及 140.038MPa，已達臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3850 及 3851，其局部放大之變形圖，如圖 4-20 所示；當沖頭衝程達 12.56mm 時，節點 1799 之應變能密度值為 140.136MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3852，其局部放大之變形圖，如圖 4-21 所示；沖頭衝程達 12.58mm 時，節點 1806 之應變能密度值為 140.046MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3853，其局部放大之變形圖，如圖 4-22 所示；沖頭衝程達 12.60mm 時，節點 1674 之應變能密度值為 140.363MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3854，其局部放大之變形圖，如圖 4-23 所示；沖頭衝程達 12.62mm 時，節點 1683 之應變能密度值為 140.363MPa，已達到臨界破裂應變能

密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3855，其局部放大之變形圖，如圖 4-24 所示；沖頭衝程達 12.64mm 時，節點 1682 及 1931 之應變能密度值為 140.149MPa 與 140.044MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3856 及 3857，而其局部放大之變形圖，如圖 4-25 所示；當沖頭衝程達 12.70mm 時，節點 1811、1796 及 1810 之應變能密度值分別為 140.202 MPa、140.027 MPa 及 140.304MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3859、3860 及 3861，其局部放大之變形圖，如圖 4-26 所示；當沖頭衝程達 13.00mm 時，節點 1943 之應變能密度值為 140.094MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3873，其局部放大之變形圖，如圖 4-27 所示；當沖頭衝程達 13.14mm 時，節點 1947 及 1831 之應變能密度值分別為 140.048MPa 及 140.481MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3879 及 3880，其局部放大之變形圖，如圖 4-28 所示；當沖頭衝程達 13.16mm 時，節點 1830 之應變能密度值為 140.526MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3881，其局部放大之變形圖，如圖 4-29 所示；當沖頭衝程達 13.20mm 時，其變形圖如圖 4-30 所示，此時節點 1834 與 1835 之應變能密度值分別為 140.367MPa 與 140.062MPa，已達到臨界破裂應變能密度 140MPa，並於工件 45 度角隅處，沿 x 方向發生節點分離，新增節點 3882 及 3883，此時新增節點局部放大之變形圖，如圖 4-31 所示，在本節中各個節點破裂前及破裂後步階之應變能密度值，已列在表 4-3 中，而在不同沖頭衝程下節點破裂新增之情形，如表 4-4 所示。

圖 4-32 為方杯拉伸破裂數值分析與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較，由圖中得知，當沖頭衝程達 13.00mm 時，成形工件還未發生頸縮的現象，而最大負荷點發生在衝程 13.19mm 時，所以在此衝程之前工件不會發生頸縮現象，而超過此點頸縮將開始發生。由圖中可知，當沖頭衝程達 13.25mm 時，負荷已有下降的趨勢，可判斷工件已發生破裂。在方杯拉伸成形時，隨著沖頭衝程的增加，料片被逐漸的拉伸成形，直到破裂發生為止。圖 4-33 為方杯拉伸沖頭衝程達 13.25mm 時，數值模擬與實驗工件之比較，由圖中可知，數值模擬與實驗之破裂皆自工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處開始，圖中節點發生破裂之位置，而圖 4-34 為方杯拉伸實驗於沖頭衝程達 13.19mm 時，工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處有明顯凹痕，即已發生頸縮，圖 4-35 為方杯拉伸實驗於沖頭衝程達 13.25mm 時，工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處已發生破裂之工件。

4.6.2 方杯工件之等效應力分佈

圖 4-36 及圖 4-37 分別顯示在方杯拉伸破裂之數值模擬時，沖頭衝程達 13.20mm 破裂時之等效應力及等效應力等值線分佈圖，由圖中之等效應力分佈之情形可知，最大等效應力值在工件沿軋軋方向夾 45 度之角隅處，其等效應力值約為 147MPa，由於工件在拉伸成形中所承受之應力，將隨著沖頭衝程之增加而遞增，而在工件沿軋軋方向夾 45 度之角隅處又承受較大之雙軸向拉伸應力影響下，將有較大之應力集中現象。

4.6.3 方杯工件之等效應變分佈

圖 4-38 及圖 4-39 分別顯示方杯拉伸破裂之數值模擬時，沖頭衝程達 13.20mm 破裂時之等效應變及等效應變等值線分佈圖，隨著沖頭衝程的增加，工件沿軋軋方向夾 45 度方向之角隅處，將承受較大之雙軸向拉伸應力，厚度縮減較大，因此應變亦較大，由圖中等效應變分佈之情形可知，應變值較大之區域發生在工件沿軋軋方向夾 45 度方向之角隅處，此時角隅處之破裂厚度大約 0.48mm，而料片原始厚度為 0.8mm，所以數值模擬之破裂應變大約為 0.4，從圖 4-38 中可知，工件沿軋軋方向夾 45 度方向角隅處之等效應變值約為 0.426，因此可推斷在此角隅處已發生破裂。

4.6.4 不同彈性棒面積之沖頭負荷比較

本節在方杯拉伸模擬中，固定沖頭及沖模之平行邊入模圓弧角半徑為 R6.00mm 之設定下，於不同彈性棒面積之假設下進行模擬，其面積大小分別為 0.002 mm^2 、 0.003 mm^2 及 0.004 mm^2 ，圖 4-40 顯示三種不同彈性棒面積設定下，數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係，由圖中可知當彈性棒面積增加，沖頭負荷會隨之變大，而彈性棒面積設定為 0.003 mm^2 時，數值模擬之結果與實驗之沖頭負荷較為一致，故本計畫數值模擬之彈性棒面積均設定 0.003 mm^2 來進行模擬。

4.6.5 方杯工件之成形極限圖

成形極限圖(Forming Limit Diagram, FLD)在板金成形領域中，是一對於板金在各種不同成形條件中，皆可廣泛評估之工具，其示意圖如圖 4-41 所示，成形極限圖是由工件成形後之主應變值及次應變值所構成，並且經由不同成形條件下得到的頸縮及破裂點，分別構成材料之頸縮成形極限曲線(Forming limit curves at

neck, FLCN)及破裂成形極限曲線(Forming limit curves at fracture, FLCF)。在本計畫數值模擬中，構成成形極限圖之主應變值及次應變值之計算方式，主要是先將元素內八個積分點之正向應變及剪應變，整理成矩陣之形式，並求解其矩陣之特徵值，而求解出之最大特徵值及次大之特徵值，則分別為成形極限圖之主應變值及次應變值，圖 4-42 顯示方杯拉伸數值模擬之沖頭衝程達 13.05mm 時，由工件之主應變值及次應變值所繪製出之成形極限圖，由其主應變值及次應變值之分佈可知，已有應變值落在頸縮與破裂成形極限曲線所構成之帶狀不穩定範圍。圖 4-43 為方杯拉伸數值模擬在沖頭衝程達 13.25mm 時，由工件之主應變值及次應變值所繪製出之成形極限圖，經由此衝程下之成形極限之主應變值及次應變值分佈可知，已有應變值超過破裂成形極限曲線，顯示工件已達到破裂。

4.6.6 工件厚度分佈之比較

為量測成形後工件各個相對位置之厚度分佈，首先將成形工件以 CNC 線切割機沿著中心線切割開來，而後以尖點量測分厘卡在工件沿輓軋方向夾 0 度角及工件沿輓軋方向夾 45 度角，量測其成形後之厚度。圖 4-44 為工件沿輓軋方向夾 0 度角之厚度分佈量測之示意圖，而圖 4-45 為沖頭衝程達 13.25mm 時，數值模擬與實驗工件沿輓軋方向夾 0 度角的厚度分佈之比較，圖中相對位置之厚度分佈區分為三個部份：A 區表示拉伸之杯底的平面部份，B 區表示杯底圓弧轉角部份，而 C 區則為拉伸杯之圓弧轉角上部至沖模與壓料板夾持部份，由圖中可知，杯底之 A 區承受拉伸力較小，整個底部的厚度值並無明顯縮減，至於圓弧轉角 B 區的部份，由於此處直接承受沖頭入模圓弧角處之拉伸力，故在此處厚度的縮減量較大，而拉伸工件之 C 區部份，由於此部份之料片被模具所挾持，故厚度並無明顯的變化，由圖中可知 A、B、C 三區的數值模擬厚度皆略高於實驗值，由於材料體積不變，而實驗工件之平均厚度較薄，使材料往長度擴張，所以實驗工件量測出之相對位置將略長於模擬量測出之相對位置，圖 4-46 為工件沿輓軋方向夾 45 度角之厚度分佈量測之示意圖，而圖 4-47 為沖頭衝程達 13.25mm 時，數值模擬與實驗工件沿輓軋方向夾 45 度角的厚度分佈之比較，由圖中可知 A、B 二區的數值模擬厚度皆略高於實驗值，由於工件底部之 A 區承受拉伸力較小，因此底部的厚度縮減較小；圓弧轉角 B 區的部份，由於工件沿輓軋方向夾 45 度角之角隅處，承受較大之雙軸向拉伸應力，故此處厚度的縮減量最大，破裂亦從此處發生，而工件之 C 區部份，由於此部份之工件為模具所挾持，故厚度幾乎不變。

4.6.7 不同沖頭底邊圓弧角半徑之沖頭負荷比較

本節在方杯拉伸模擬中，於固定沖模平行邊入模圓弧角半徑為 R6.00mm 之條件下，將設計三組不同沖頭底邊圓弧角半徑，分別為 R4.00mm、R6.00mm，

及 R8.00mm，如圖 4-48 所示，而數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較，如圖 4-49 所示，由圖中可知，沖頭圓弧角半徑為 R8.00mm 時，模擬之沖頭負荷略低沖頭圓弧角半徑為 R6.00mm 時之沖頭負荷，由於工件在沖頭衝程達 12.00mm 左右已發生破裂，模擬之沖頭負荷因此下降；當沖頭圓弧角半徑為 R4.00mm 時，模擬之沖頭負荷略高於沖頭圓弧角半徑為 R6.00mm 時之沖頭負荷，並且在沖頭衝程為 10.00mm 左右發生破裂，而隨著沖頭底邊圓弧角半徑遞增，沖頭負荷會隨之遞減。

4.6.8 不同沖模平行邊入模圓弧角半徑之沖頭負荷比較

本節在方杯拉伸模擬中，於固定沖頭底邊圓弧角半徑為 R6.00mm 之條件下，將設計三組不同沖模平行邊之入模圓弧角半徑，分別為 R4.00mm、R6.00mm，及 R8.00mm，如圖 4-50 所示，而數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較，如圖 4-51 所示，由圖中可知，沖模圓弧角半徑為 R4.00mm 時，模擬之沖頭負荷將略高於沖模圓弧角半徑為 R6.00mm 時之沖頭負荷，並且在沖頭衝程達 10.50mm 左右已發生破裂，模擬之沖頭負荷因此下降；當沖模圓弧角半徑為 R8.00mm 時，模擬之沖頭負荷略低於沖模圓弧角半徑為 R6.00mm 時之沖頭負荷，而隨著沖模平行邊入模圓弧角半徑遞增，沖頭負荷會隨之遞減。

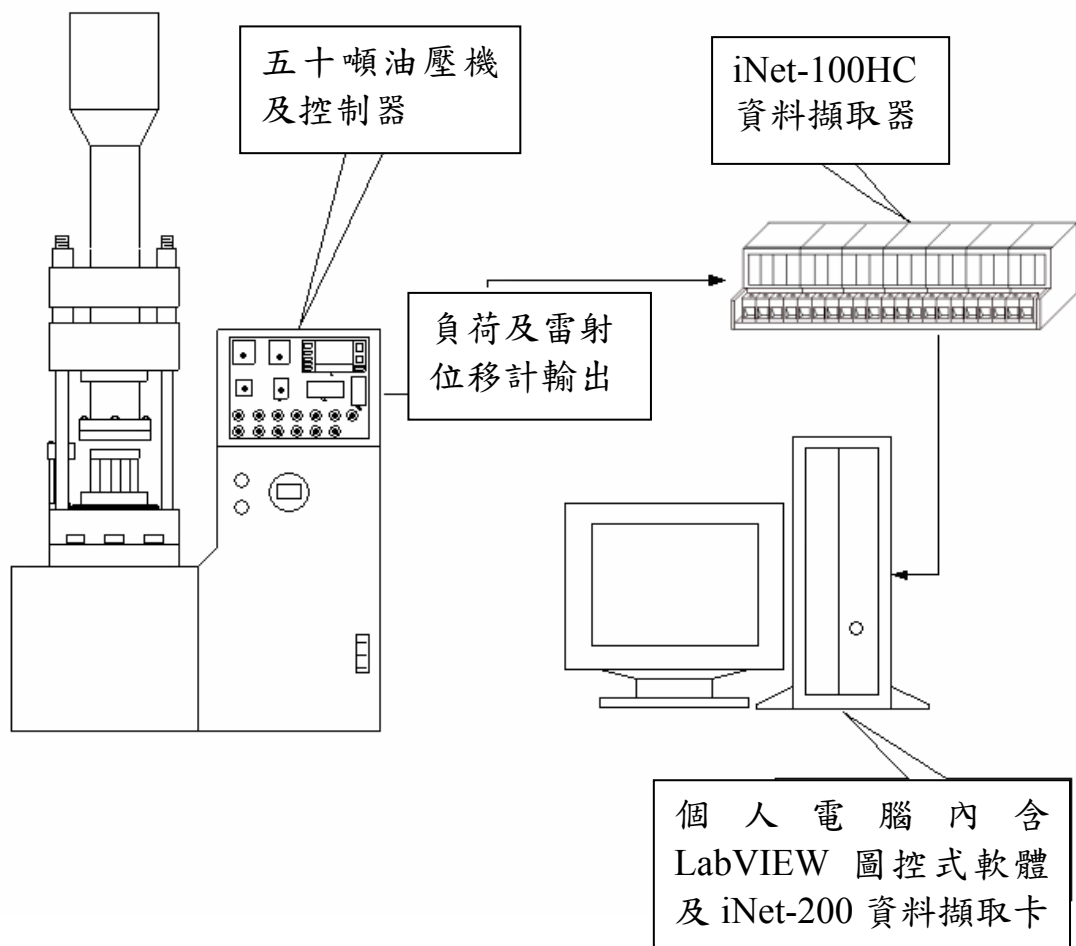


圖 4-1 實驗設備之整體系統配置圖

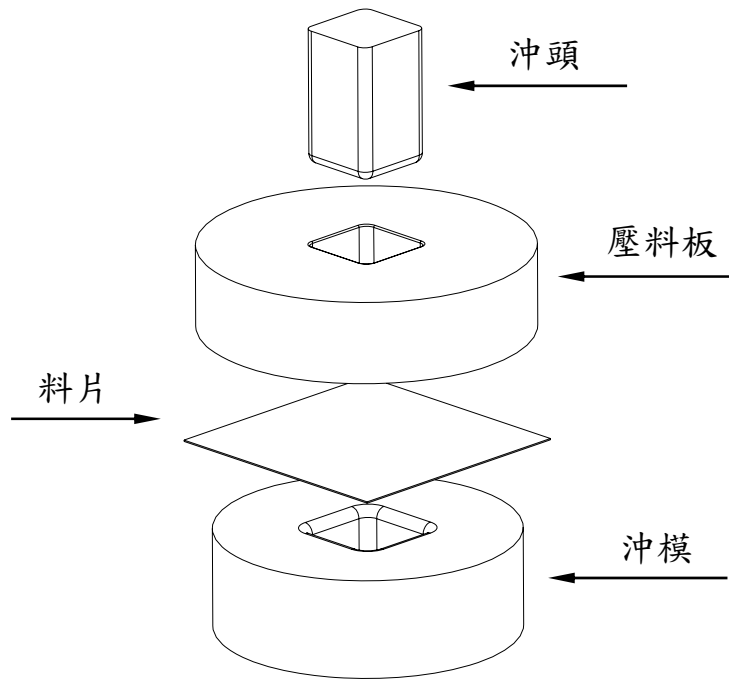


圖 4-2 方杯拉伸製程的模具配置圖

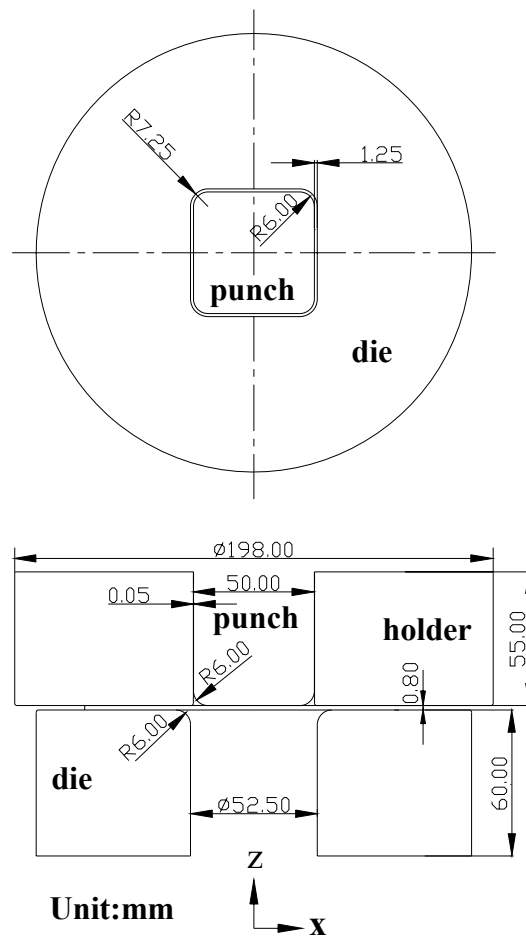


圖 4-3 方杯拉伸製程之模具尺寸圖

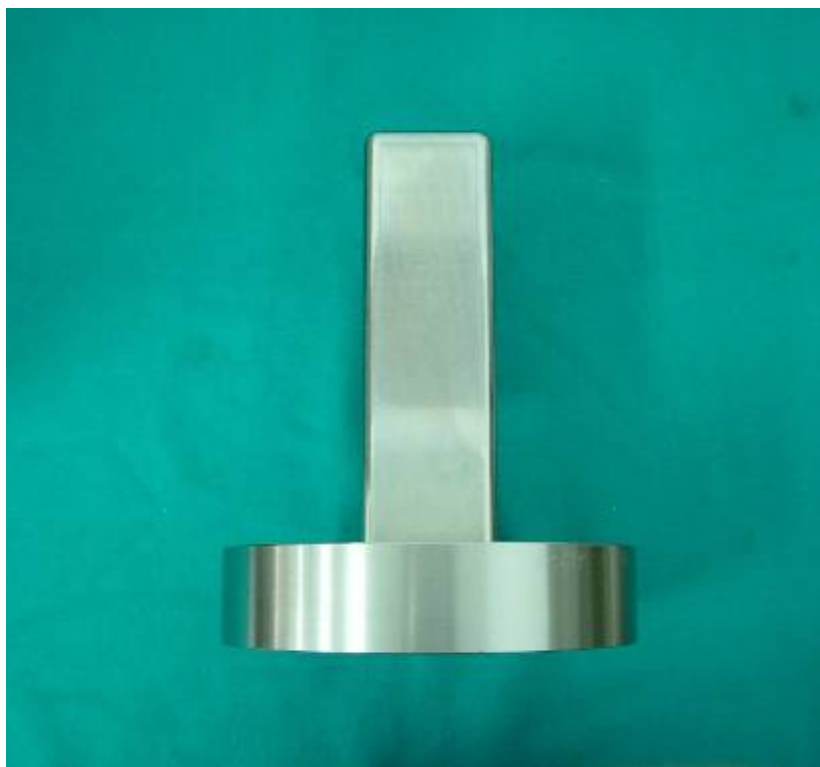


圖 4-4 方杯拉伸成形之沖頭

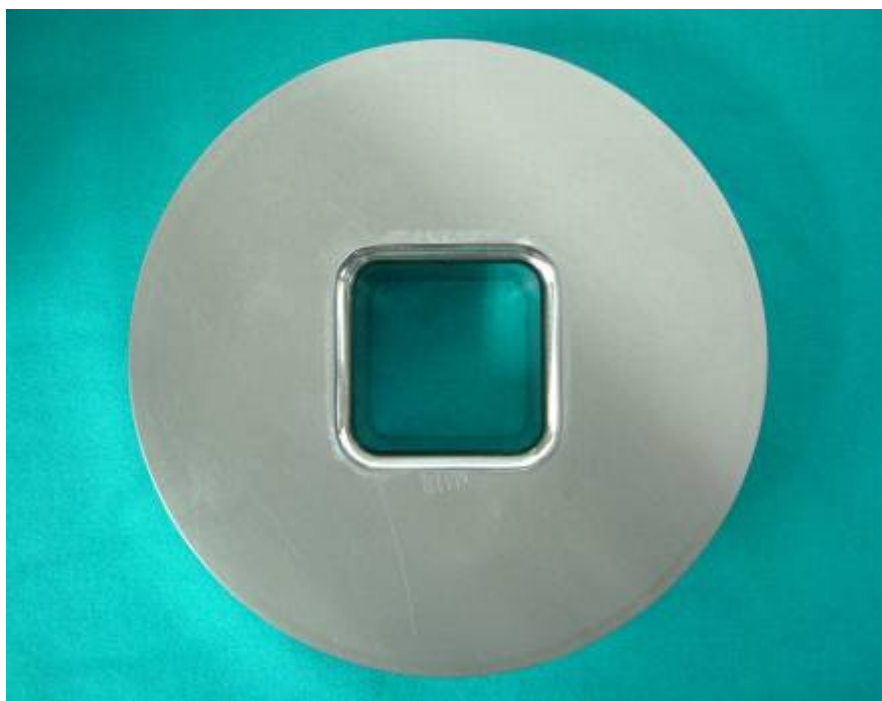


圖 4-5 方杯拉伸成形之沖模

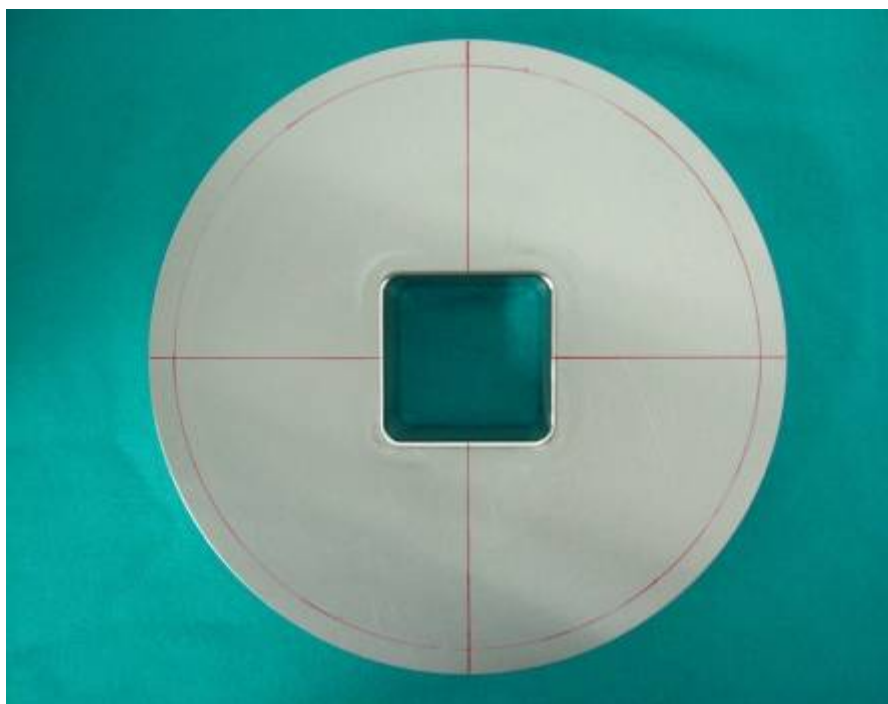


圖 4-6 方杯拉伸成形之壓料板

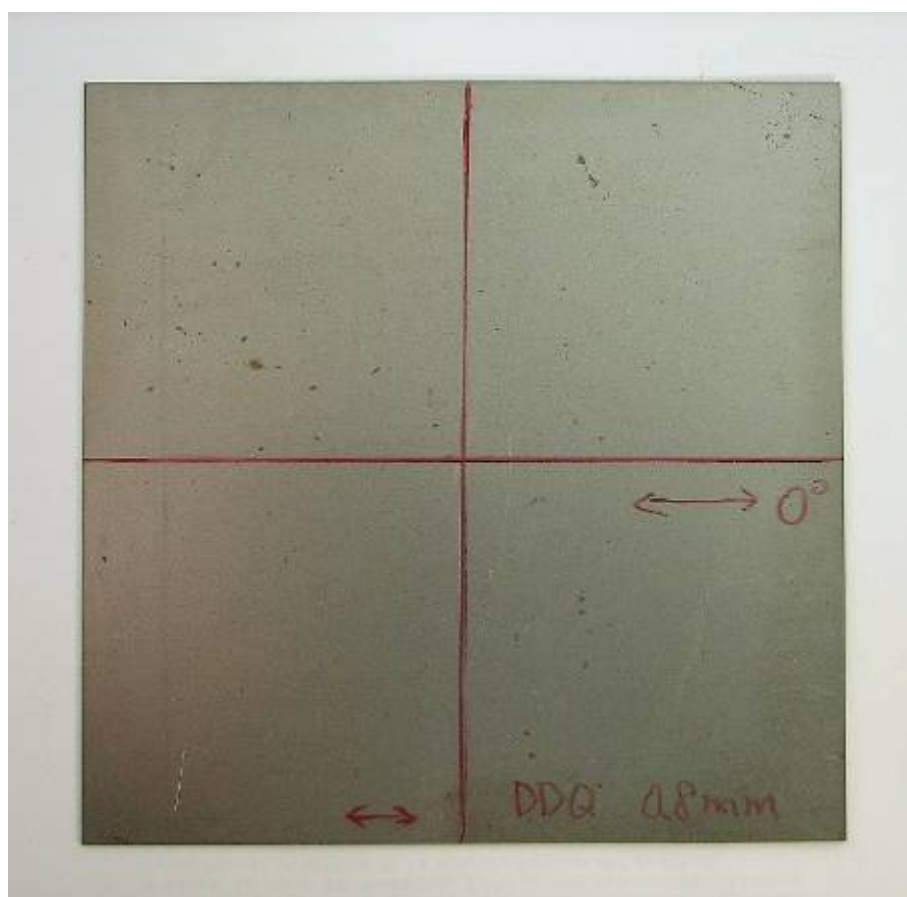


圖 4-7 方杯拉伸成形之料片

表 4-1 模具與料片有限元素網格分割之相關數據

模具與料片	元素形式	節點總數	元素總數
沖頭	殼元素	37	7
沖模		49	9
壓料板		21	3
料片	實體元素	3844	900

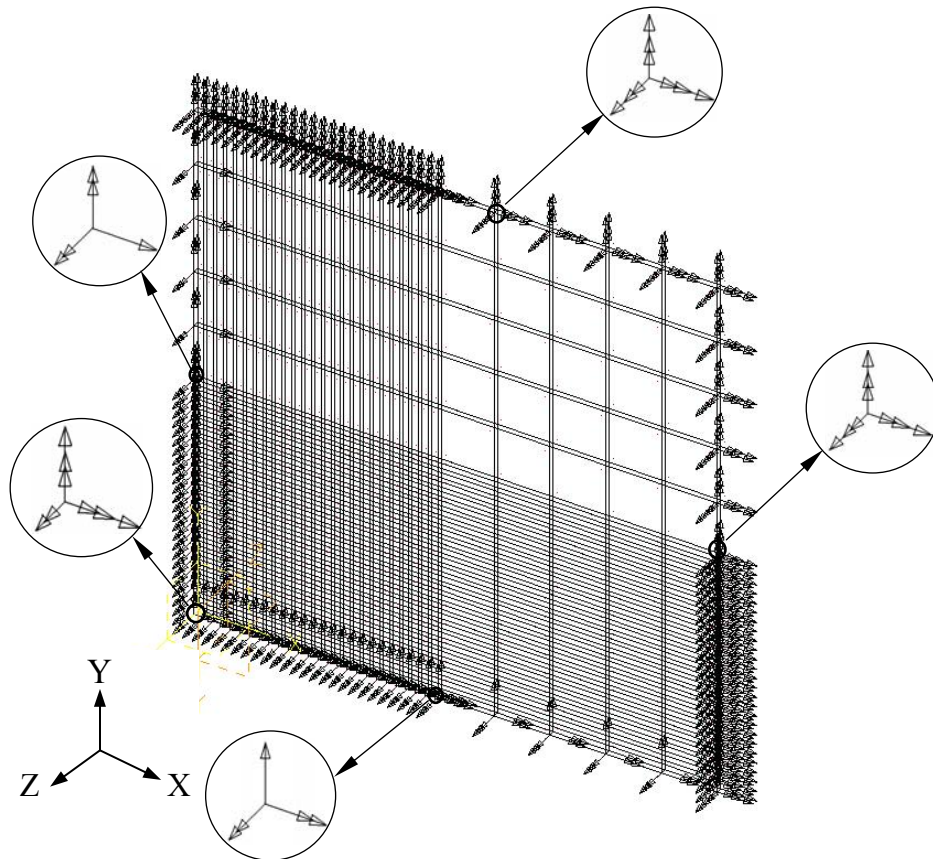


圖 4-8 方杯拉伸成形四分之一料片之網格分割及邊界條件設定

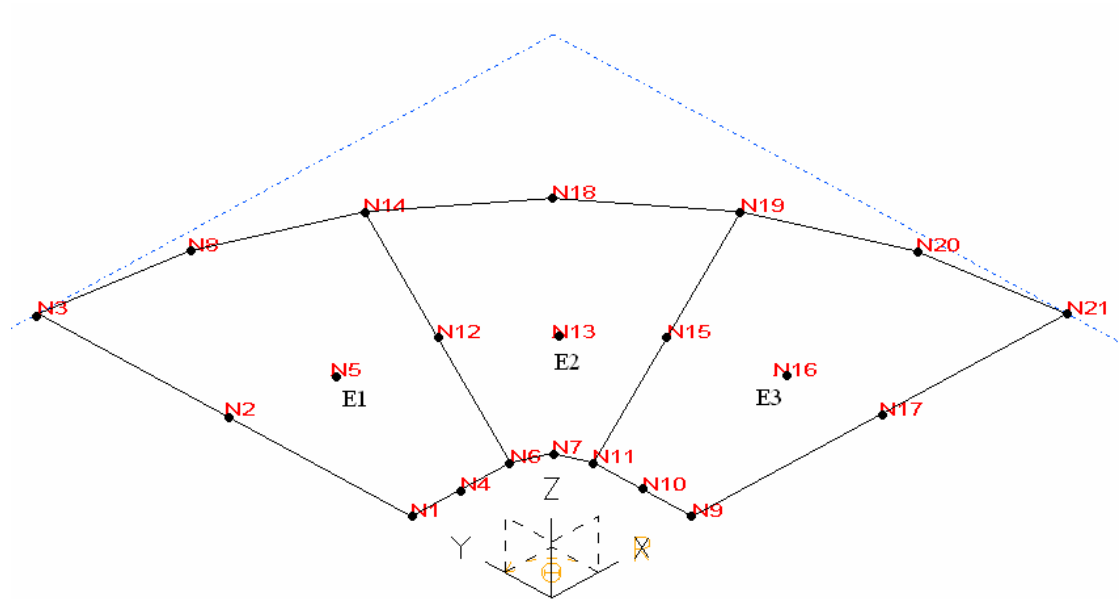


圖 4-9 方杯拉伸成形壓料板之元素分割

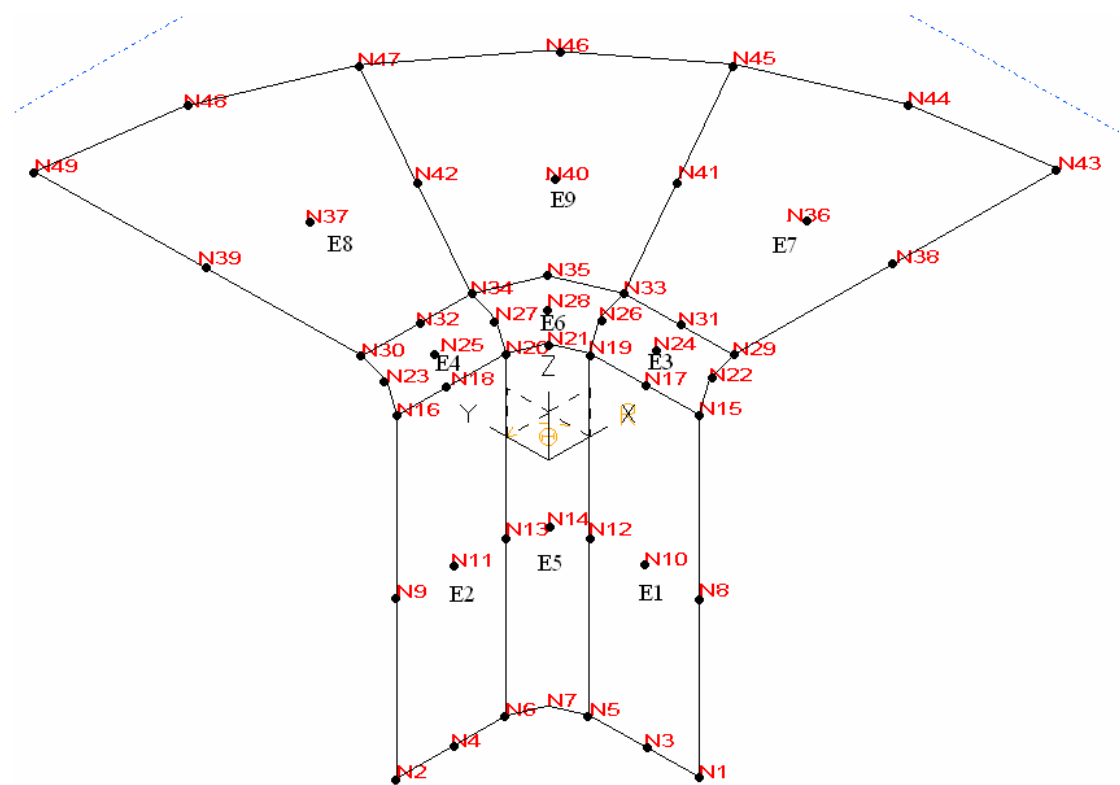


圖 4-10 方杯拉伸成形沖模之元素分割

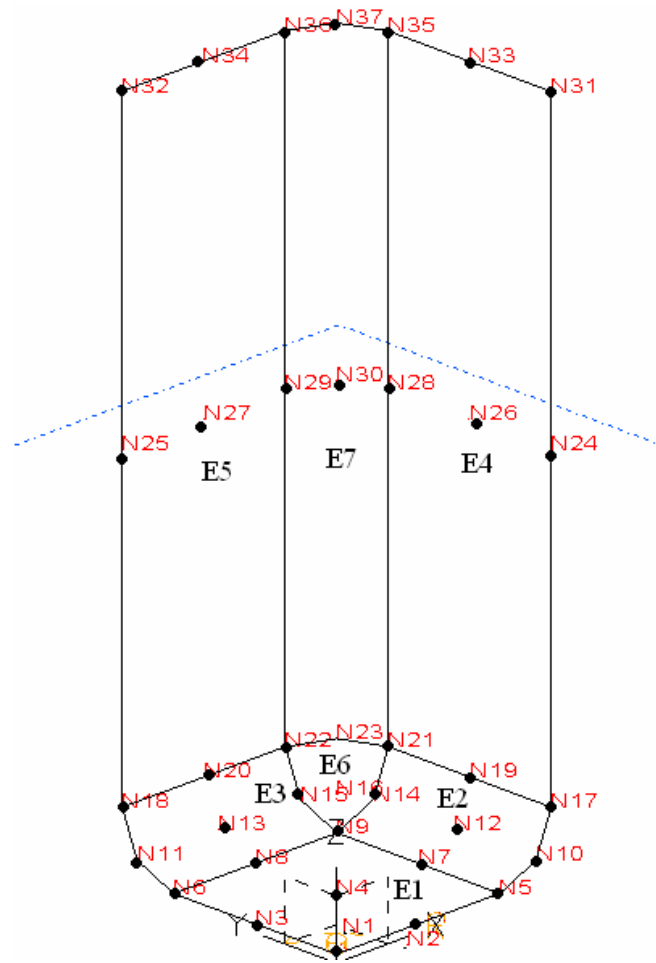


圖 4-11 方杯拉伸成形沖頭之元素分割

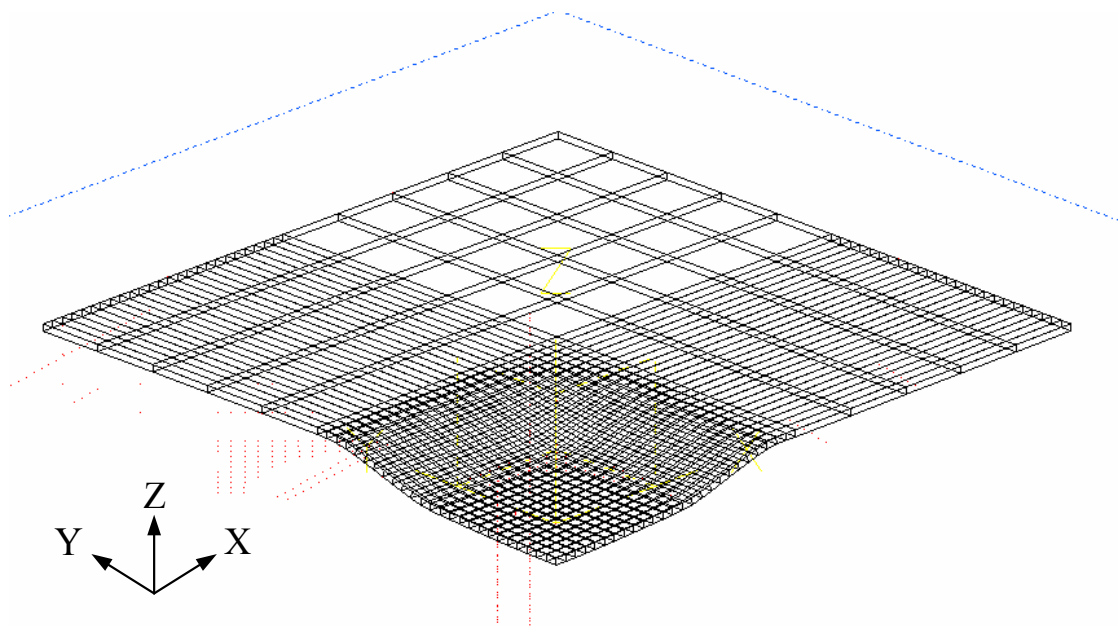


圖 4-12 沖頭衝程達 4.00mm 時之工件變形圖

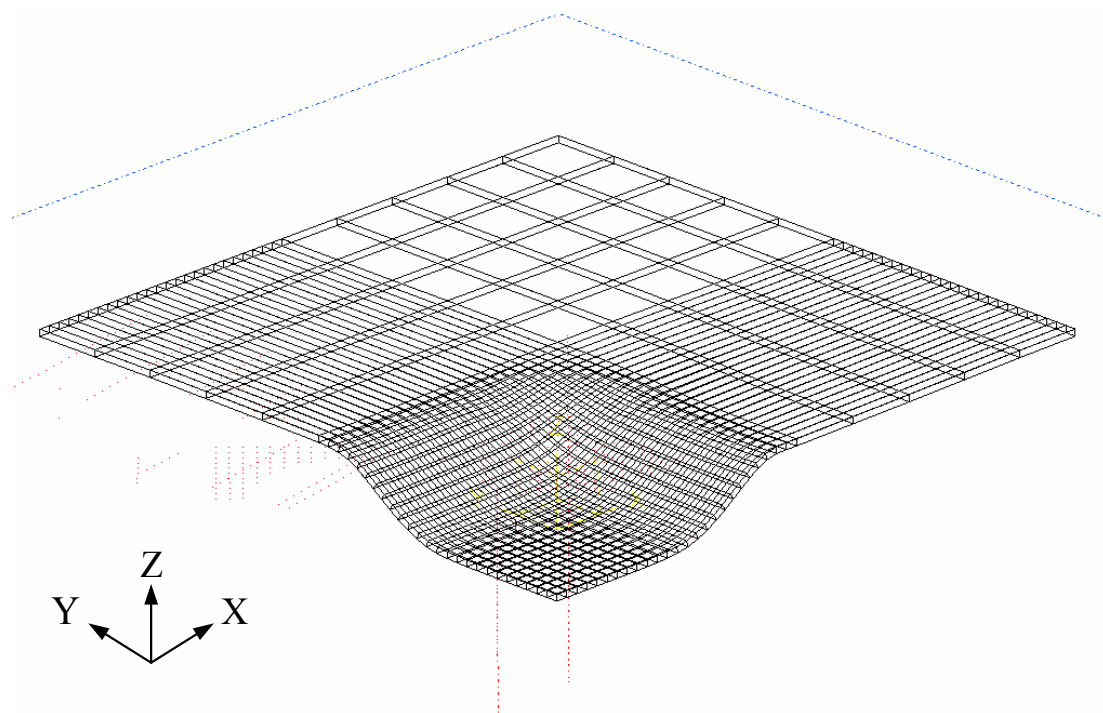


圖 4-13 沖頭衝程達 8.00mm 時之工件變形圖

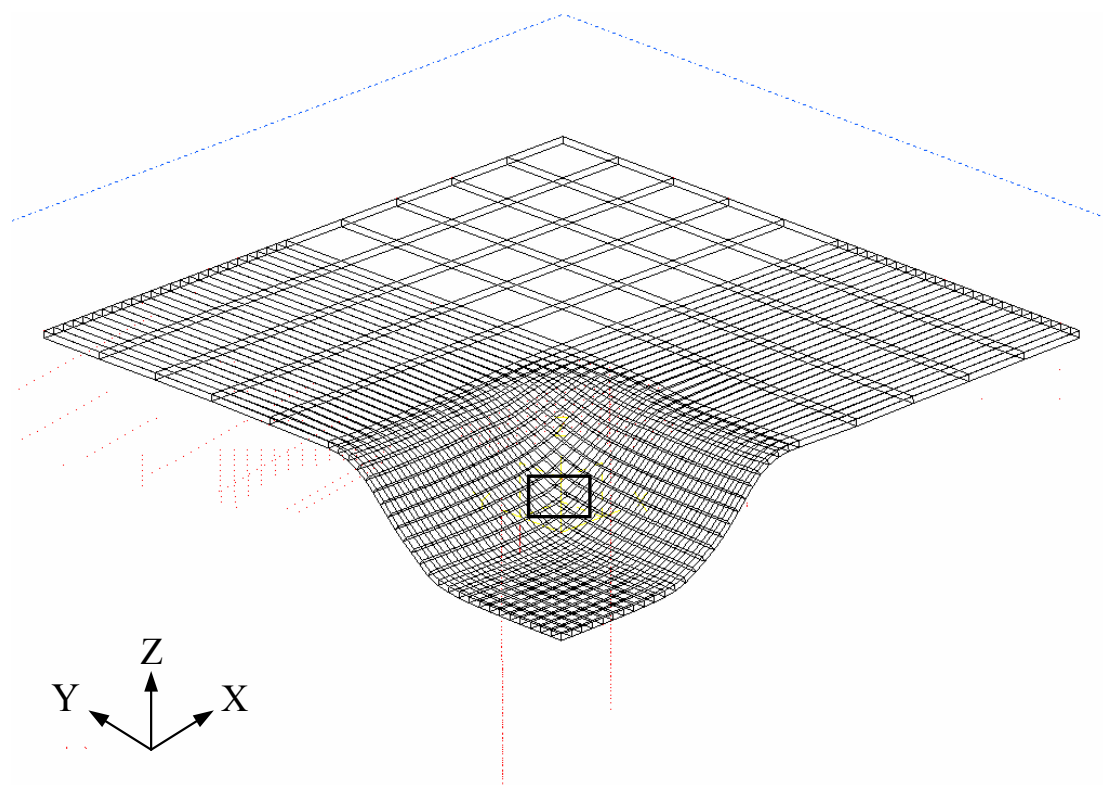


圖 4-14 沖頭衝程達 11.79mm 時之工件變形圖

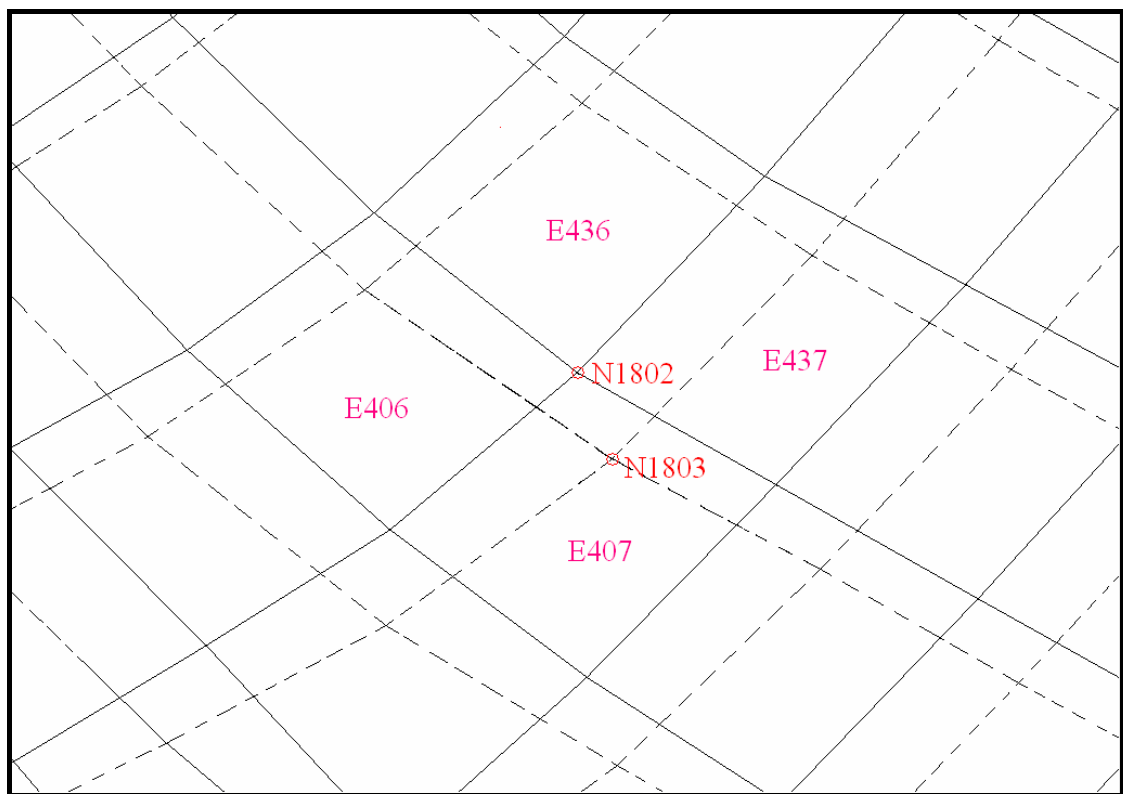


圖 4-15 沖頭衝程達 11.791mm 時工件局部放大之變形圖

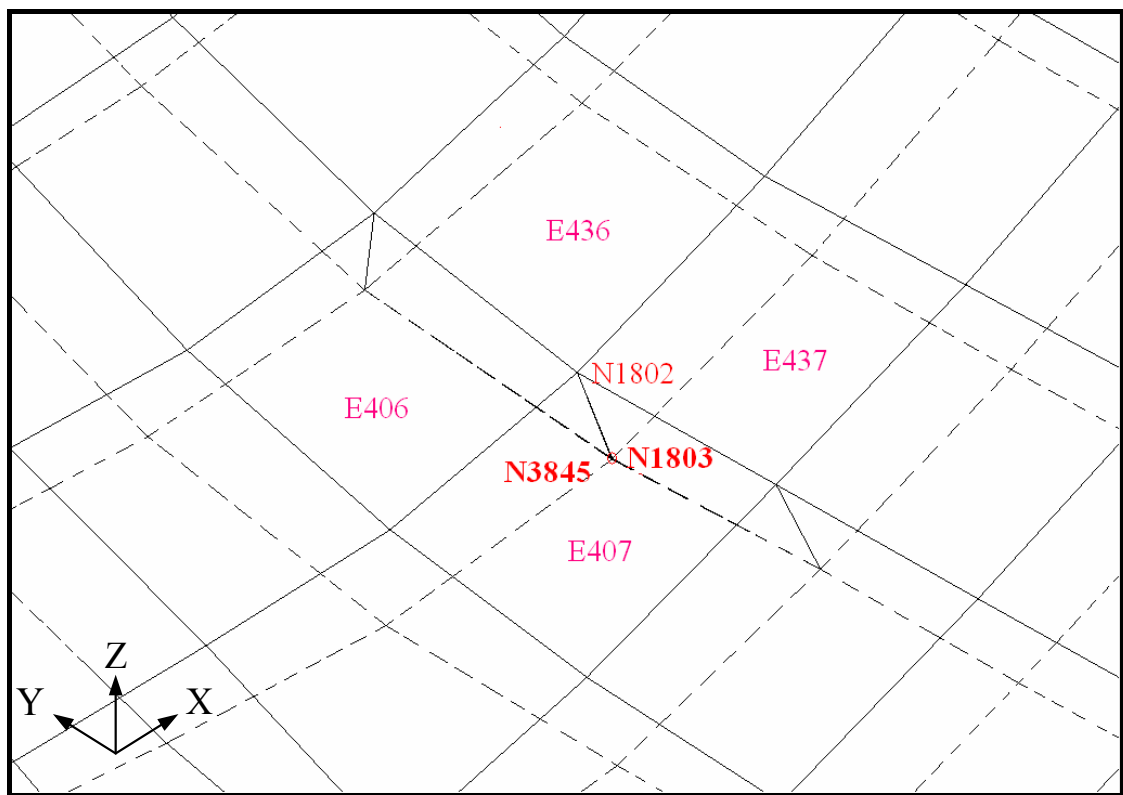


圖 4-16 沖頭衝程達 11.792mm 時工件局部放大之變形圖

表 4-2 料片破裂前後節點之座標數據

	Step	X 座標(mm)	Y 座標(mm)	Z 座標(mm)
節點 1802	11791	20.89	20.35	-7.262
	11792	20.89	20.35	-7.262
節點 1803	11791	21.19	20.39	-7.833
	11792	21.19	20.39	-7.834
節點 3845	11791	21.19	20.39	-7.833
	11792	21.18	20.39	-7.834

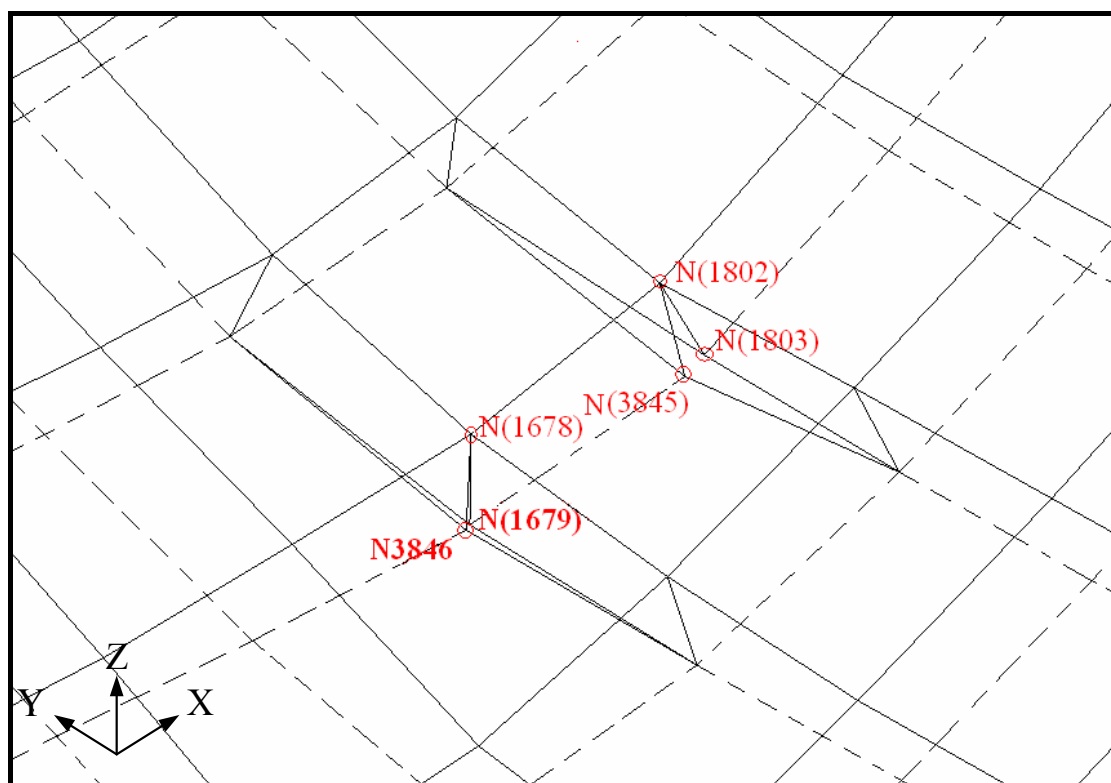


圖 4-17 沖頭衝程達 11.94mm 時工件局部放大之變形圖

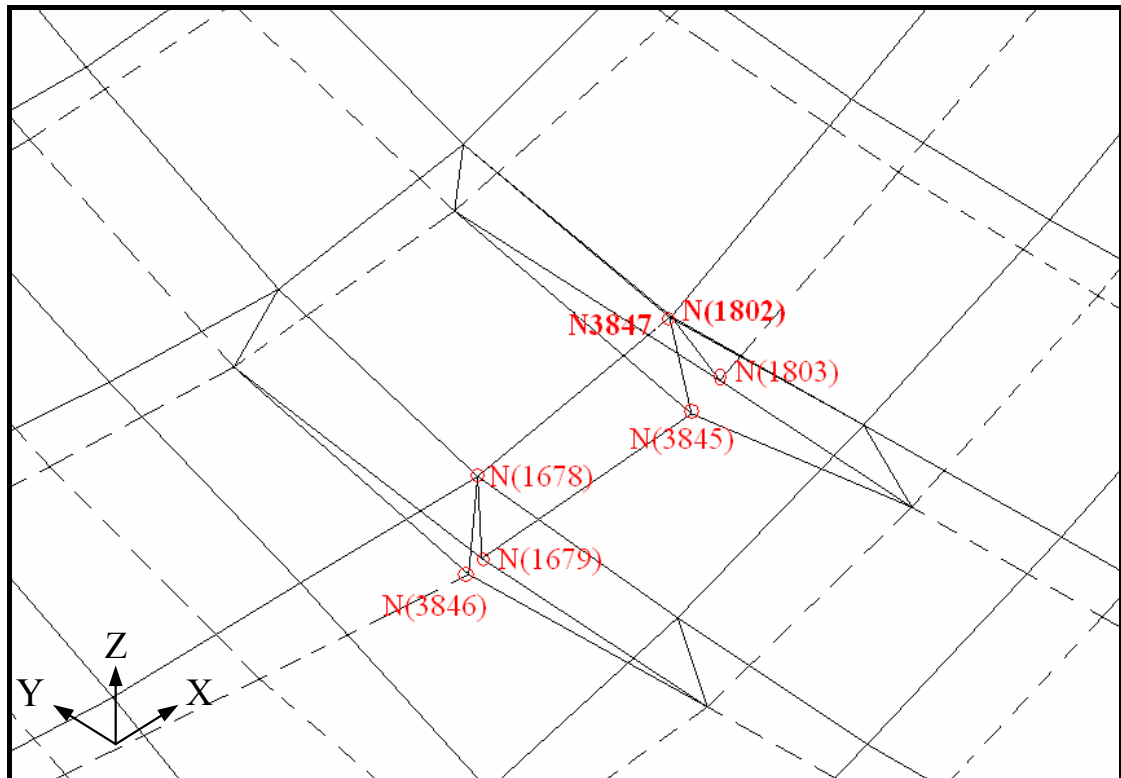


圖 4-18 沖頭衝程達 12.40mm 時工件局部放大之變形圖

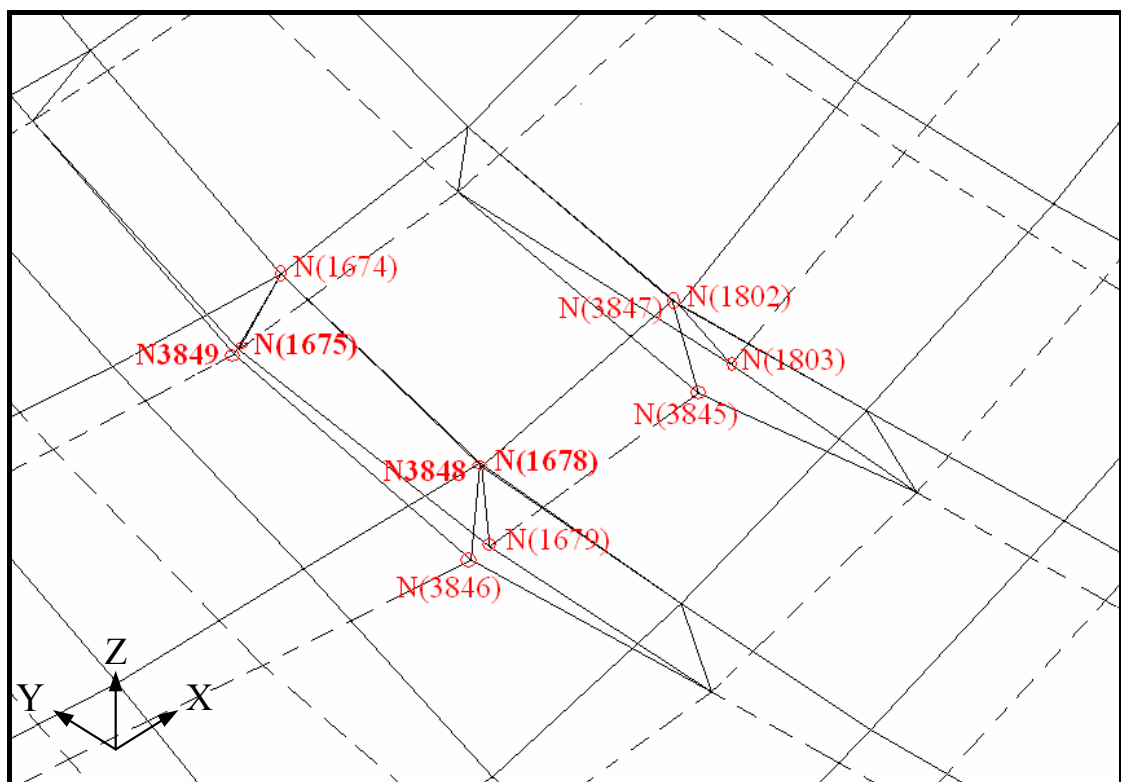


圖 4-19 沖頭衝程達 12.48mm 時工件局部放大之變形圖

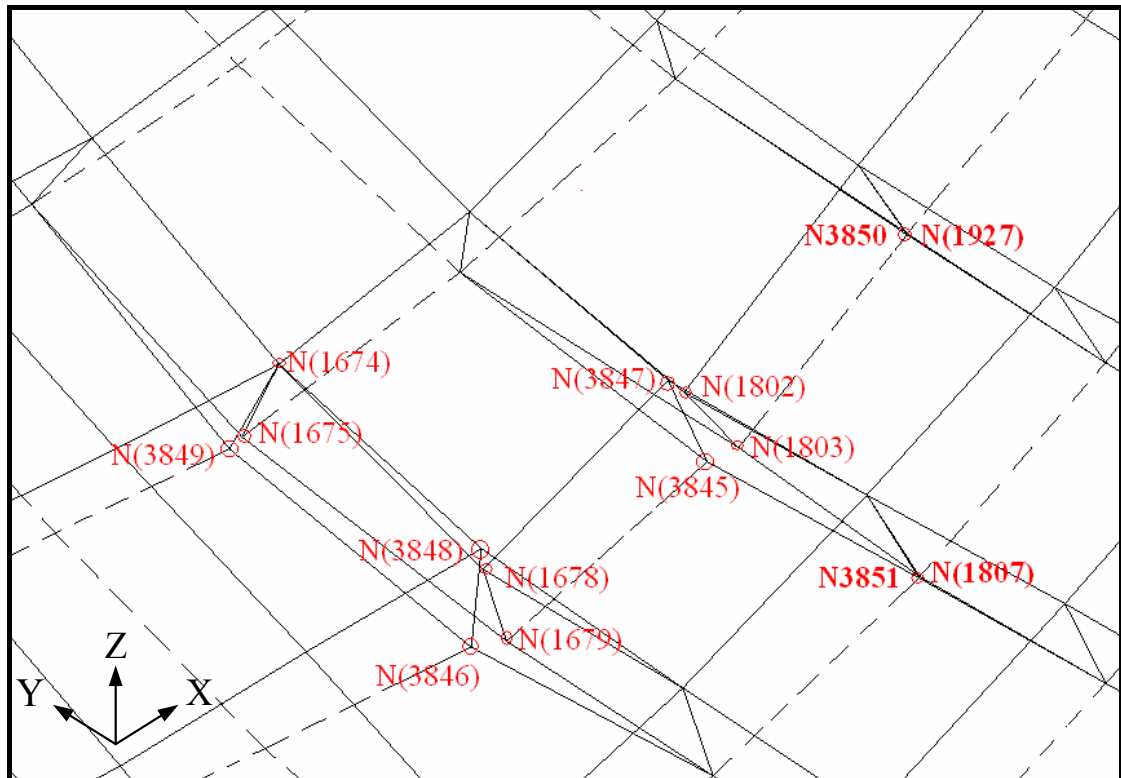


圖 4-20 沖頭衝程達 12.52mm 時工件局部放大之變形圖

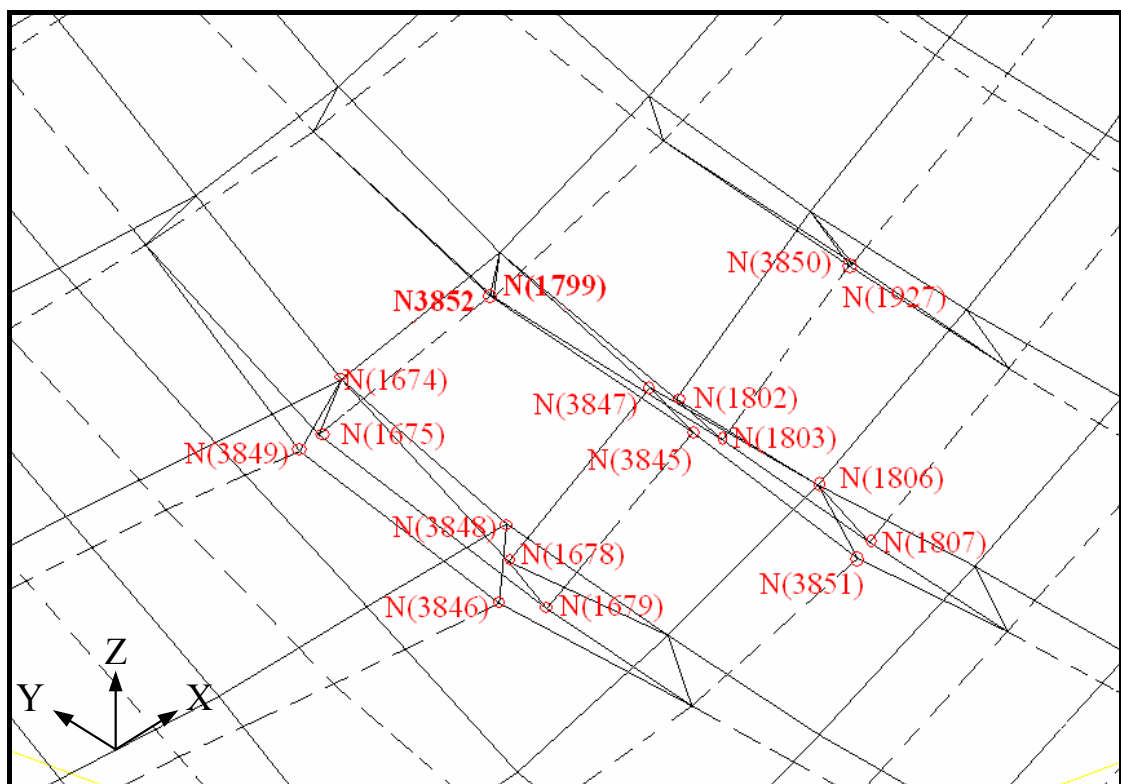


圖 4-21 沖頭衝程達 12.56mm 時工件局部放大之變形圖

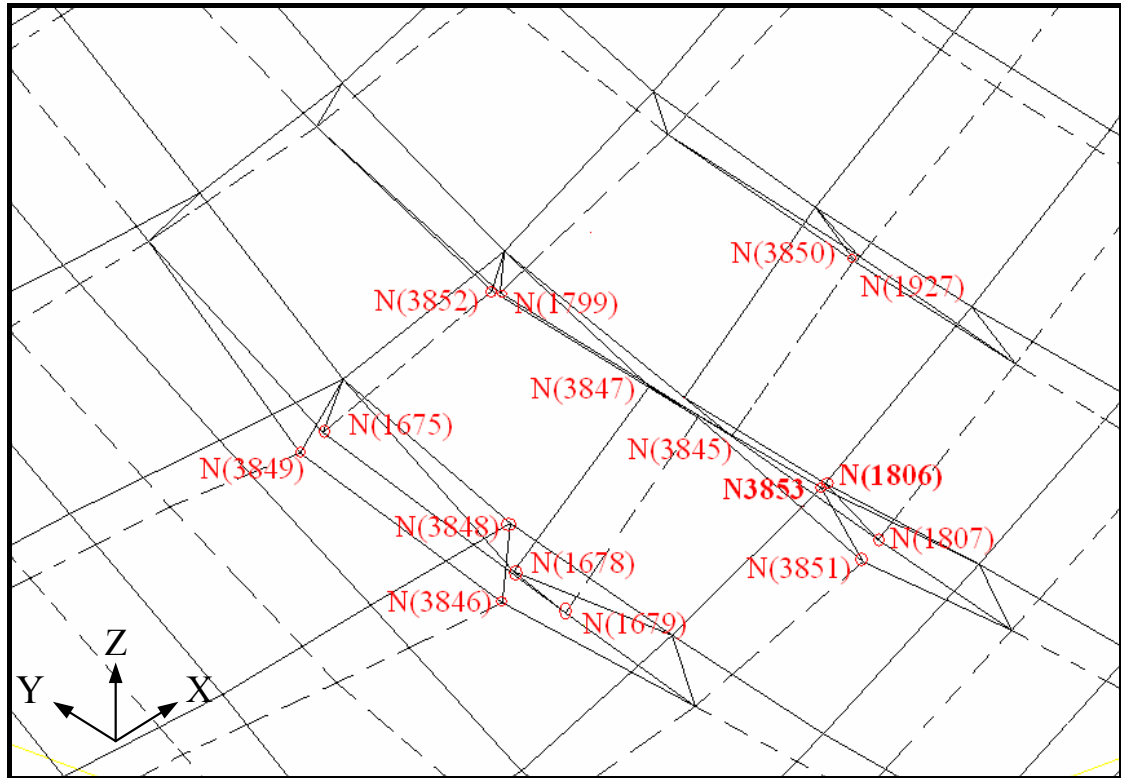


圖 4-22 沖頭衝程達 12.58mm 時工件局部放大之變形圖

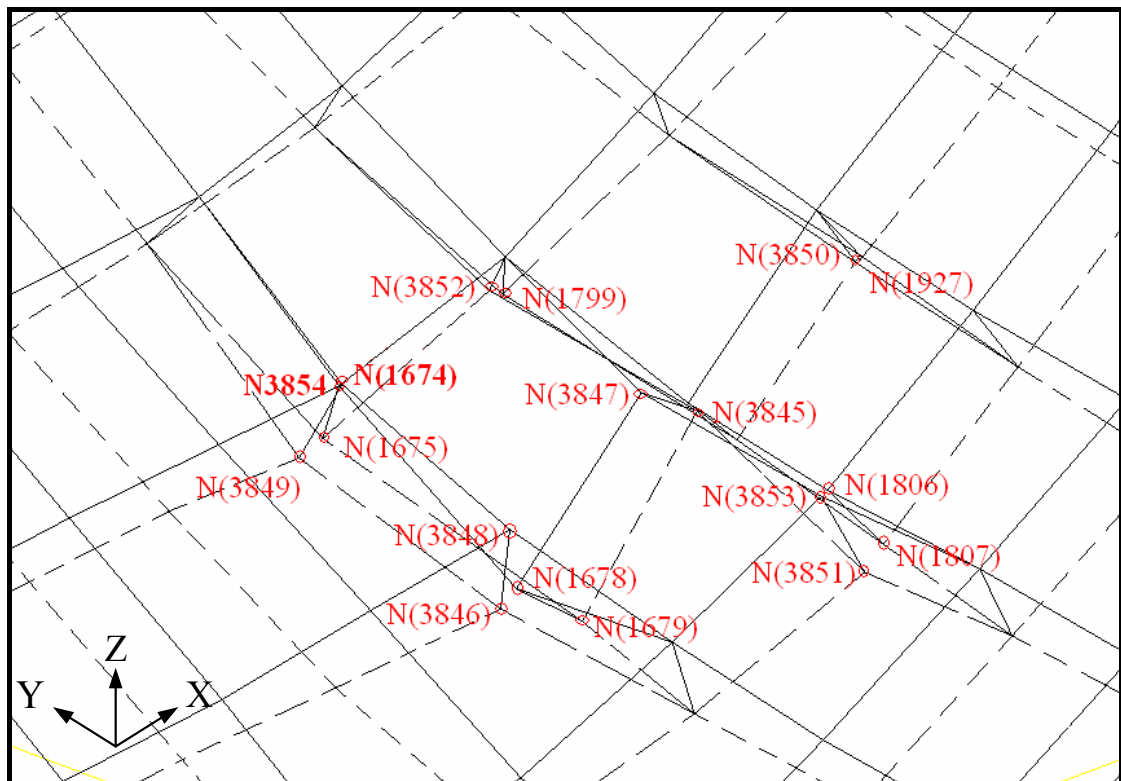


圖 4-23 沖頭衝程達 12.60mm 時工件局部放大之變形圖

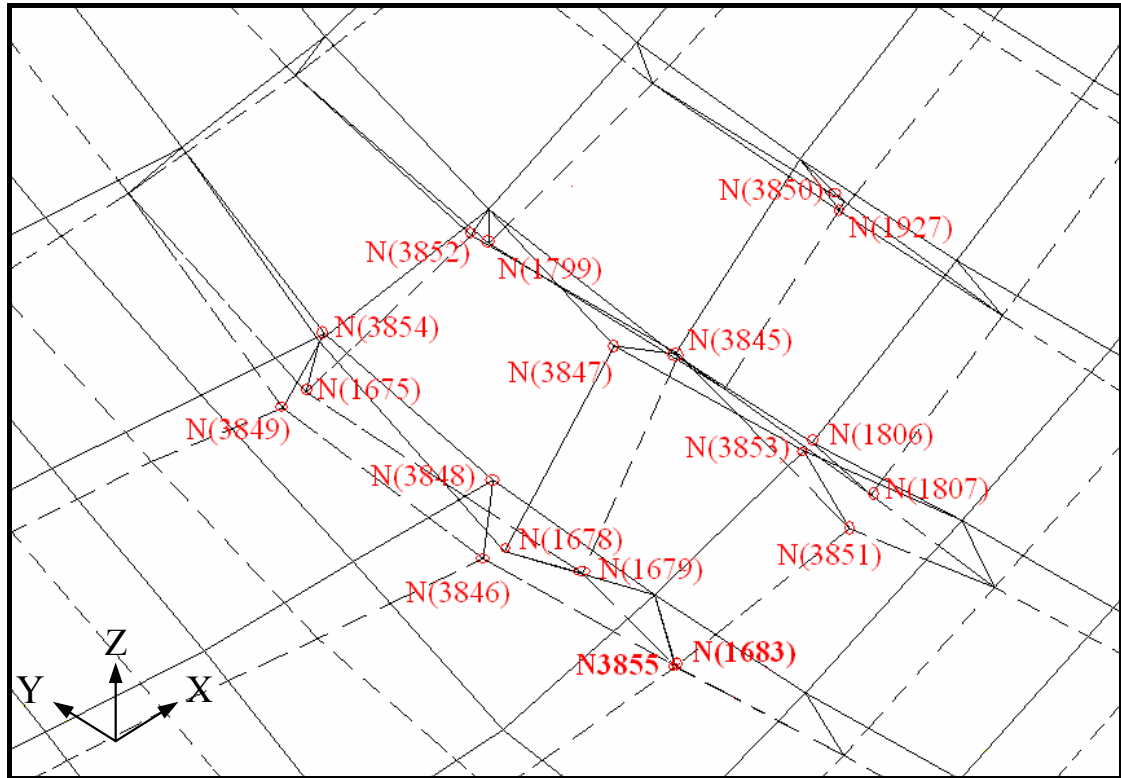


圖 4-24 沖頭衝程達 12.62mm 時工件局部放大之變形圖

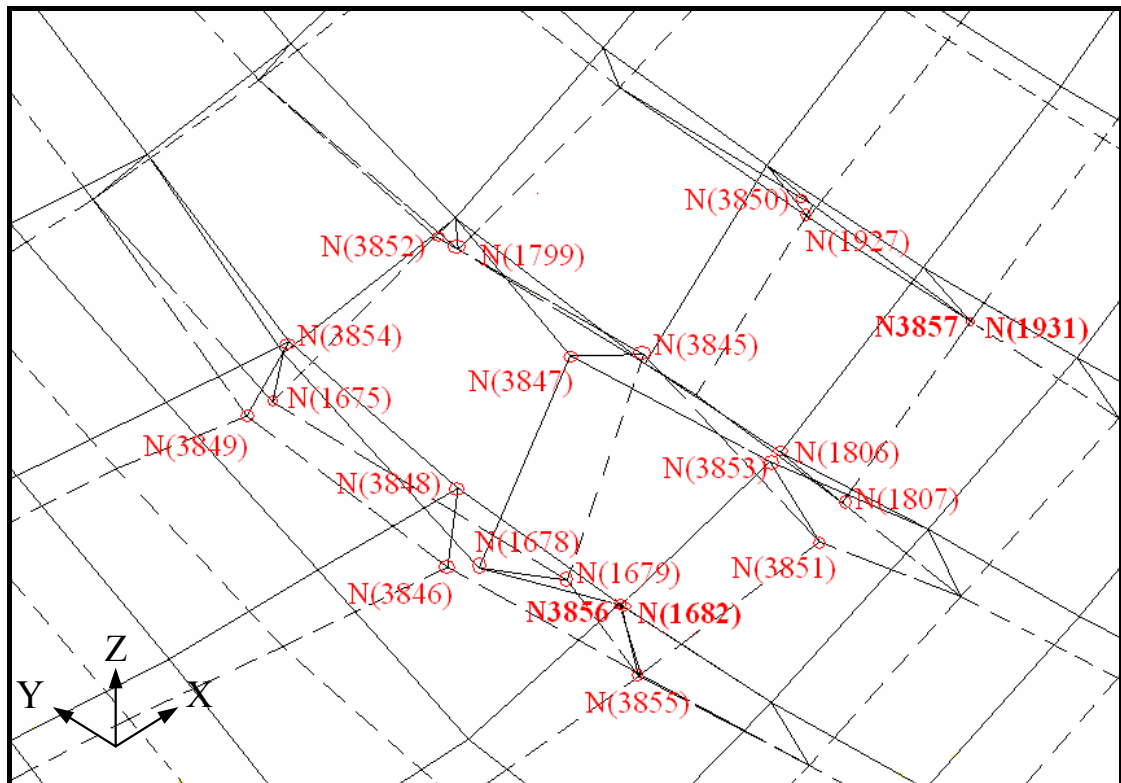


圖 4-25 沖頭衝程達 12.64mm 時工件局部放大之變形圖

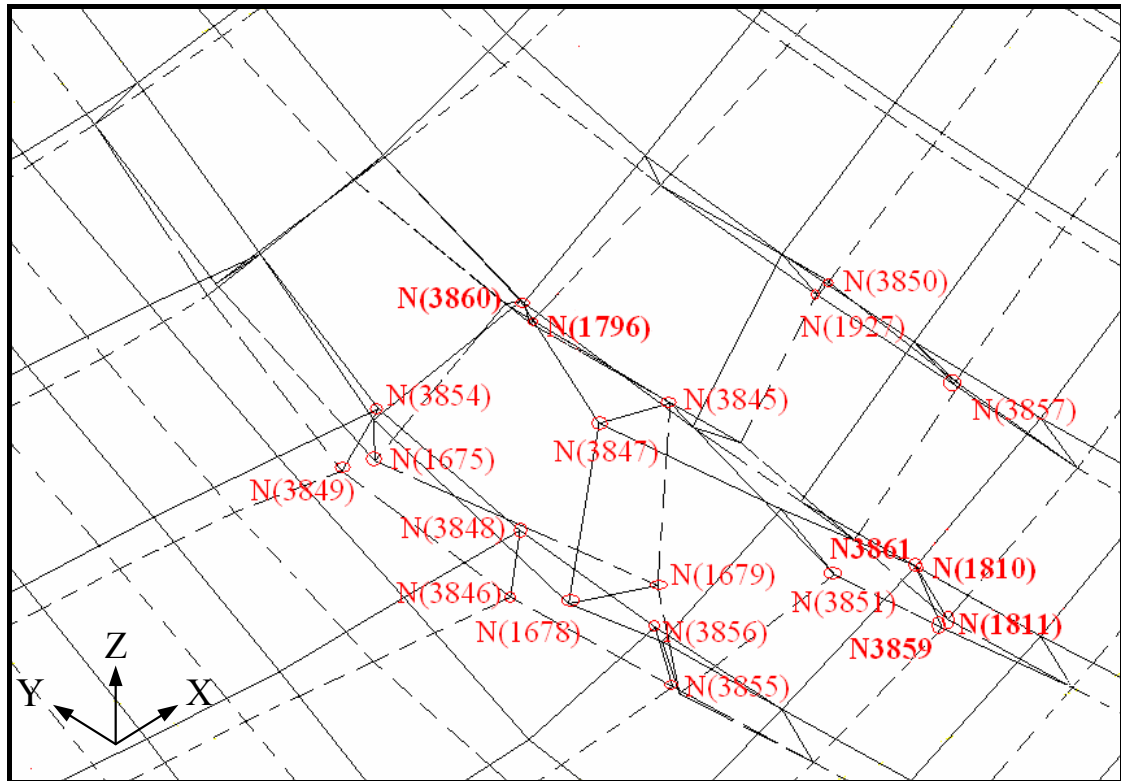


圖 4-26 沖頭衝程達 12.70mm 時工件局部放大之變形圖

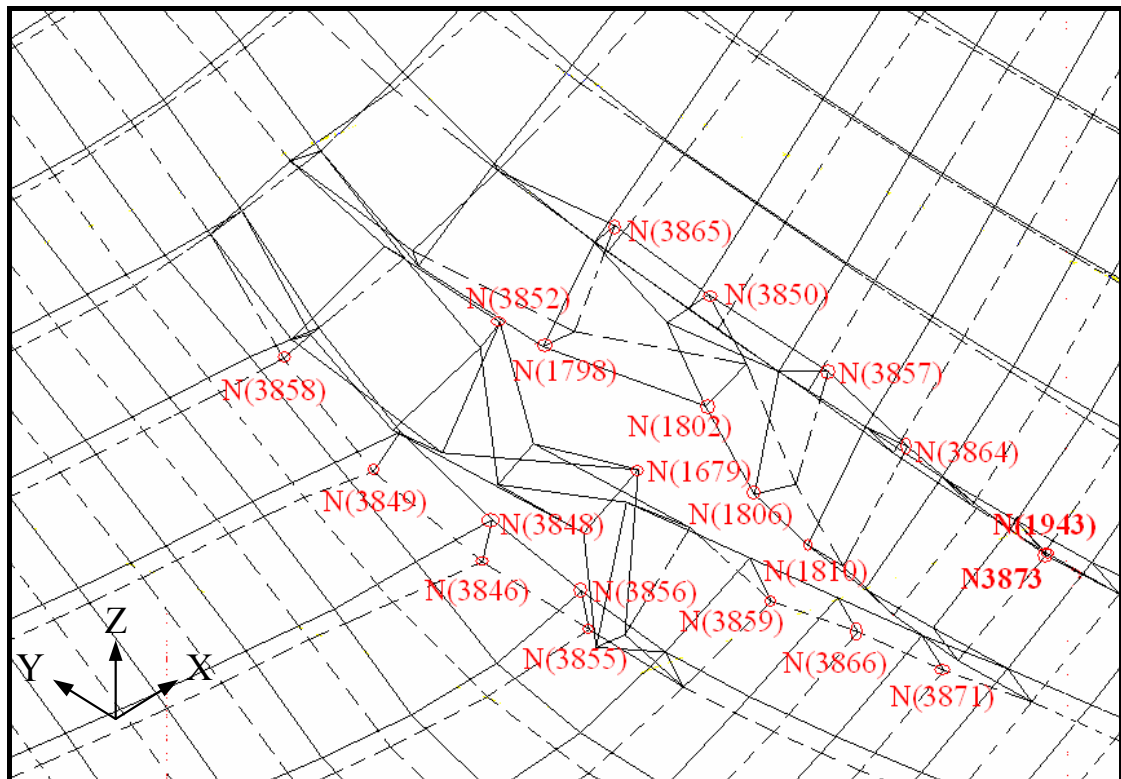


圖 4-27 沖頭衝程達 13.00mm 時工件局部放大之變形圖

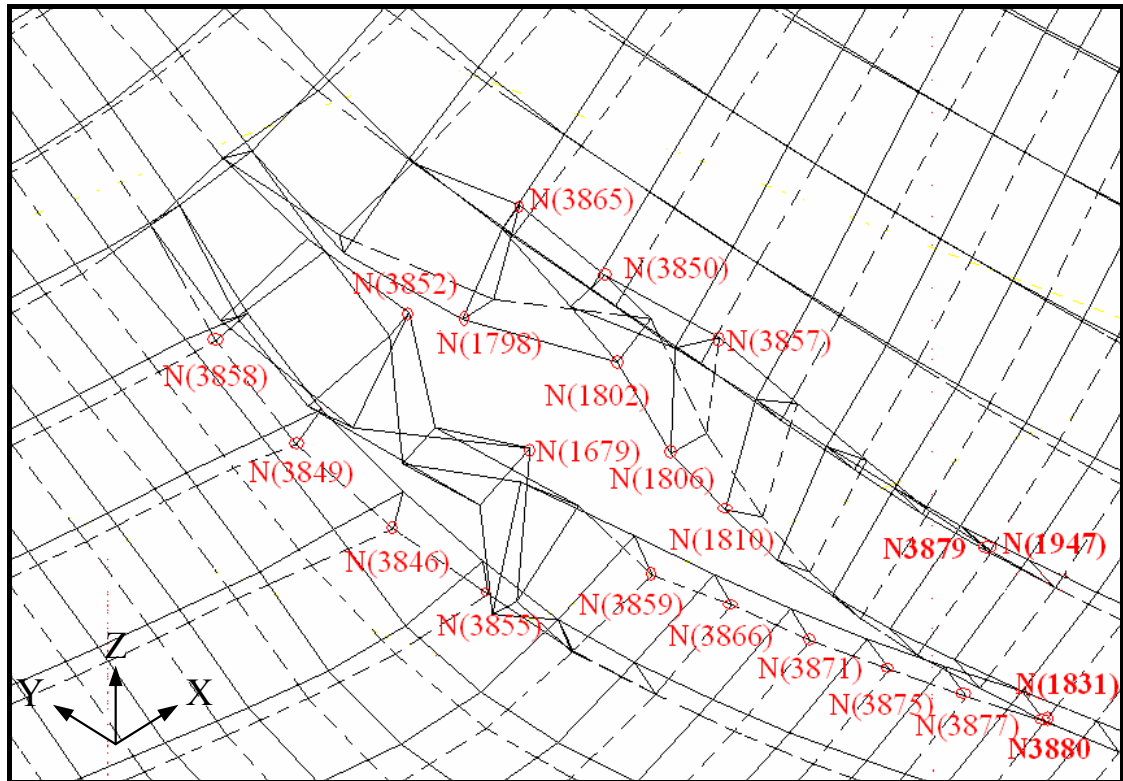


圖 4-28 沖頭衝程達 13.14mm 時工件局部放大之變形圖

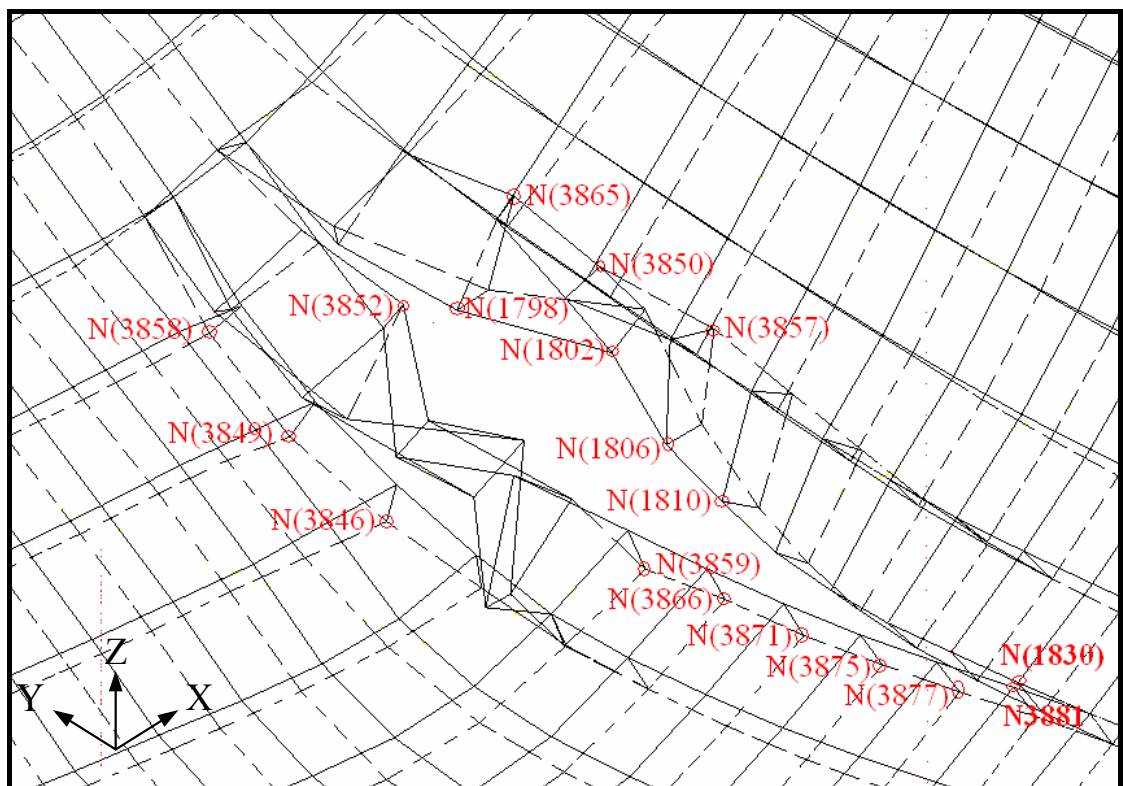


圖 4-29 沖頭衝程達 13.16mm 時工件局部放大之變形圖

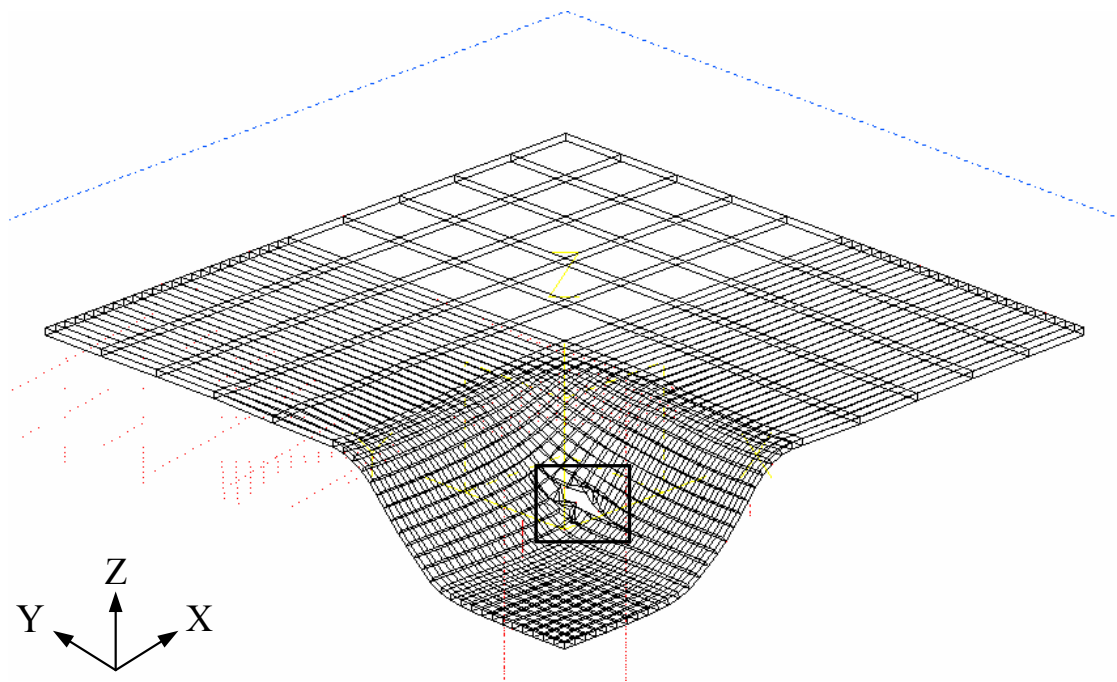


圖 4-30 沖頭衝程達 13.20mm 時之工件變形圖

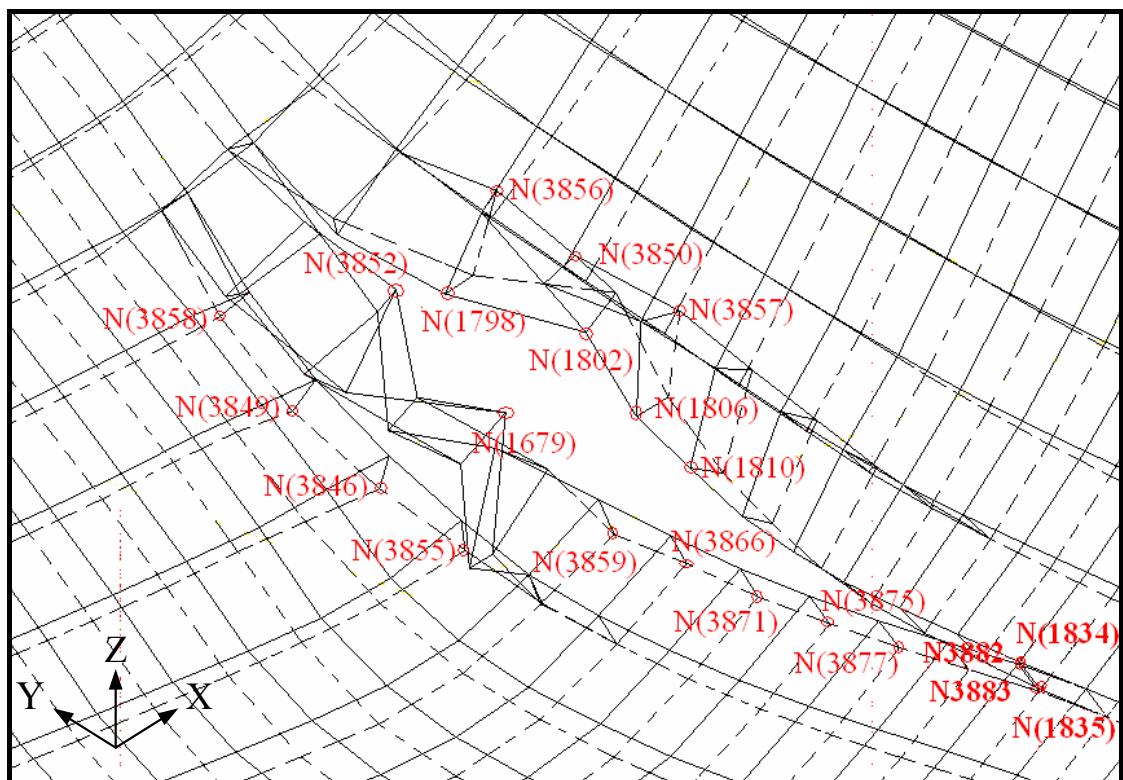


圖 4-31 沖頭衝程達 13.20mm 時工件局部放大之變形圖

表 4-3 料片於不同衝程時節點破裂前後之應變能密度(MPa)

節點	步階	應變能密度	節點	步階	應變能密度
1803	11791	139.9844	1682	12631	139.7128
	11792	140.0040		12632	140.1488
1679	11926	139.9198	1931	12640	139.8694
	11927	140.0058		12641	140.0439
1802	12394	139.9860	1811	12682	139.9296
	12395	140.0152		12683	140.2022
1678	12465	139.9633	1796	12685	139.7892
	12466	140.0175		12686	140.0274
1675	12469	139.9985	1810	12700	139.9420
	12470	140.0701		12701	140.3045
1927	12506	139.9374	1943	12982	139.9870
	12507	140.0733		12983	140.0938
1807	12518	139.7464	1947	13122	139.9903
	12519	140.0381		13123	140.0475
1799	12550	139.9216	1831	13139	139.9341
	12551	140.1363		13140	140.4806
1806	12562	139.8128	1830	13241	139.3372
	12563	140.0463		13142	140.5257
1674	12584	139.9249	1834	13194	139.7751
	12585	140.3633		13195	140.3674
1683	12606	139.5164	1835	13196	139.9990
	12607	140.0261		13197	140.0617

表 4-4 料片於不同沖頭衝程時新增節點之情形

衝程(mm)	新增節點數	節點總數
11.79	1	3845
11.94	1	3846
12.40	1	3847
12.48	2	3849
12.52	2	3851
12.56	1	3852
12.58	1	3853
12.60	1	3854
12.62	1	3855
12.64	2	3857
12.68	1	3858
12.70	3	3861
12.74	2	3863
12.78	1	3864
12.82	2	3866
12.84	2	3868
12.86	1	3869
12.88	1	3970
12.92	2	3872
13.00	1	3873
13.02	3	3876
13.08	2	3878
13.14	2	3880
13.16	1	3881
13.20	2	3883

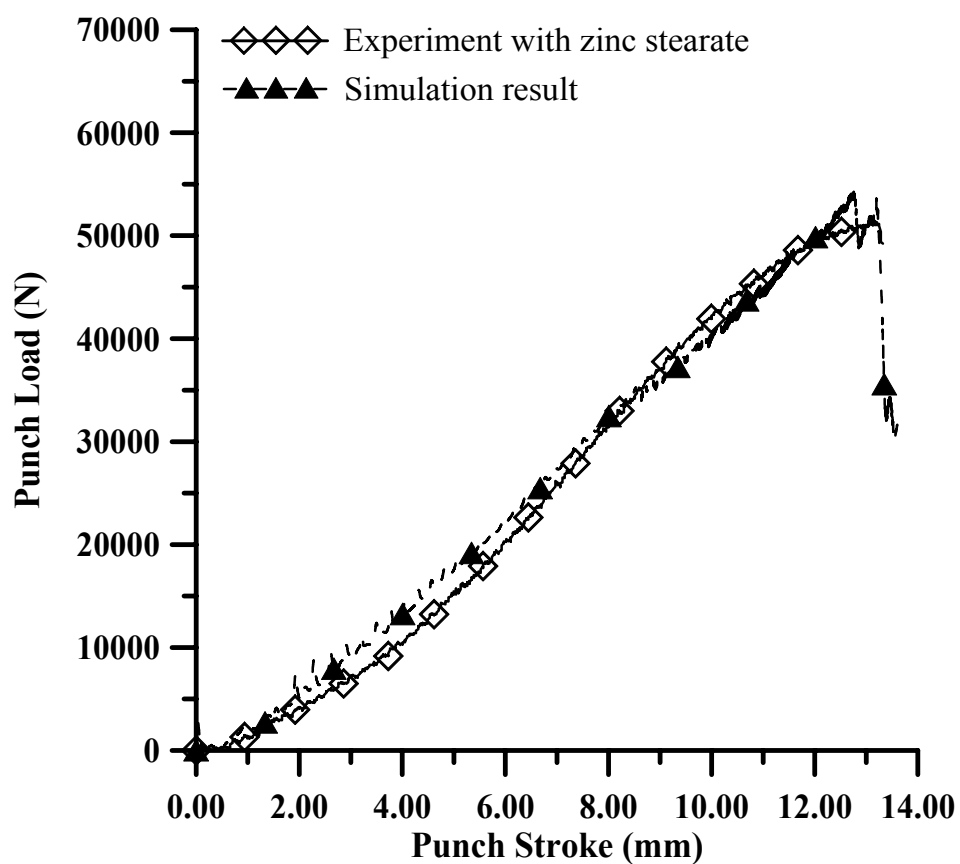


圖 4-32 方杯拉伸破裂之數值分析與實驗之沖頭負荷與衝程關係



圖 4-33 方杯拉伸破裂之數值模擬與實驗工件之比較

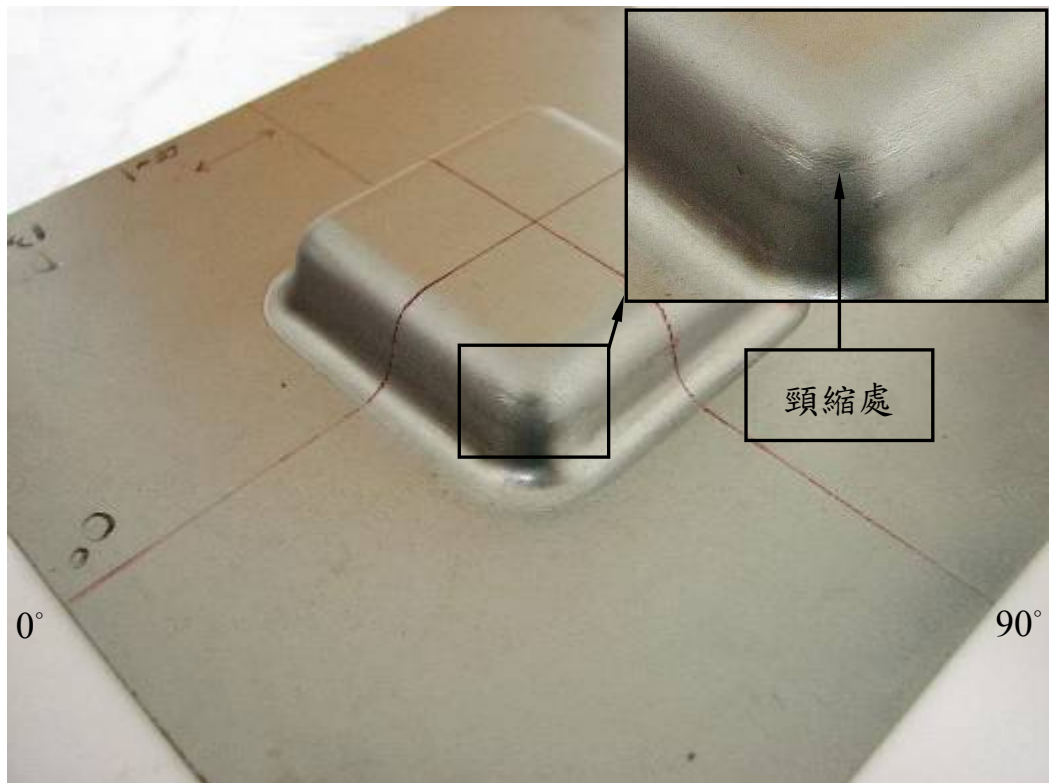


圖 4-34 方杯拉伸實驗之沖頭衝程達 13.19mm 時發生頸縮之工件

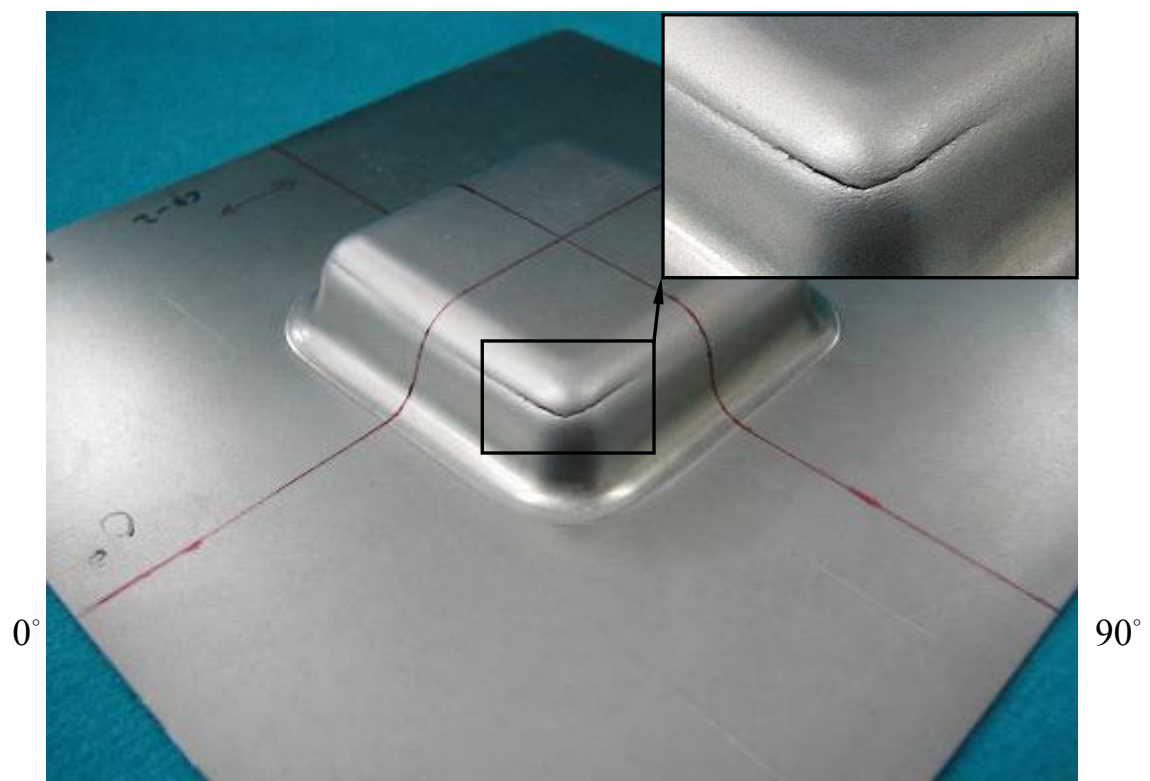


圖 4-35 方杯拉伸實驗之沖頭衝程達 13.25mm 時發生破裂之工件

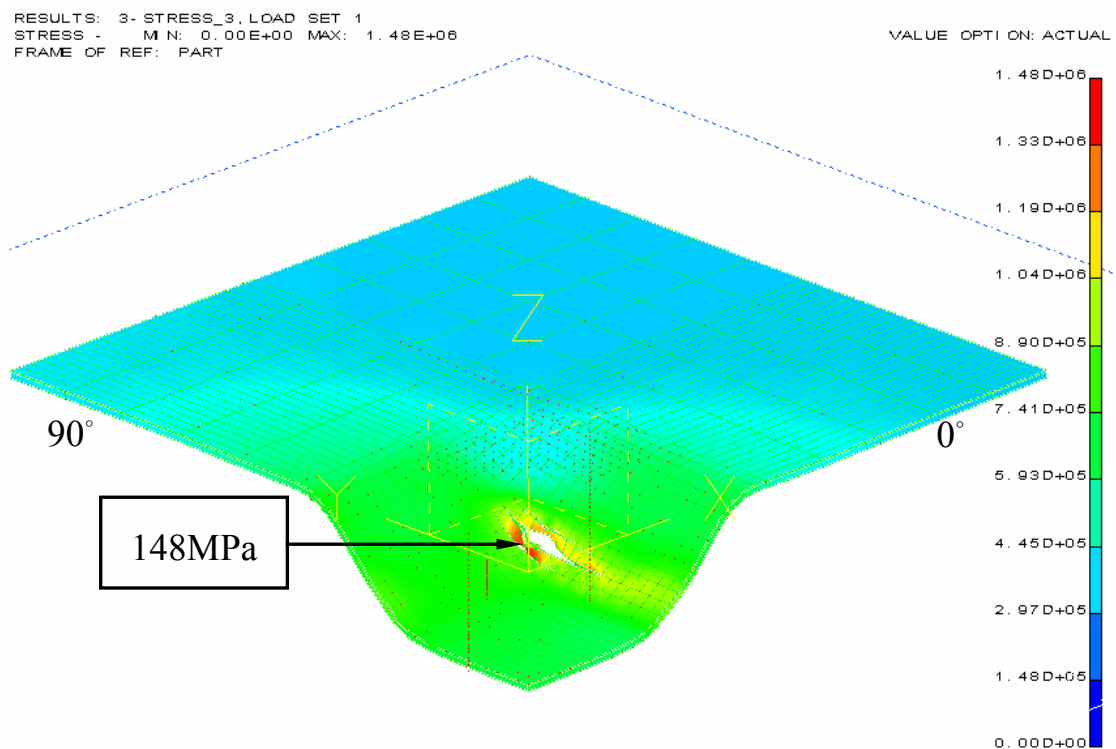


圖 4-36 方杯拉伸沖頭衝程達 13.20mm 之等效應力分佈圖

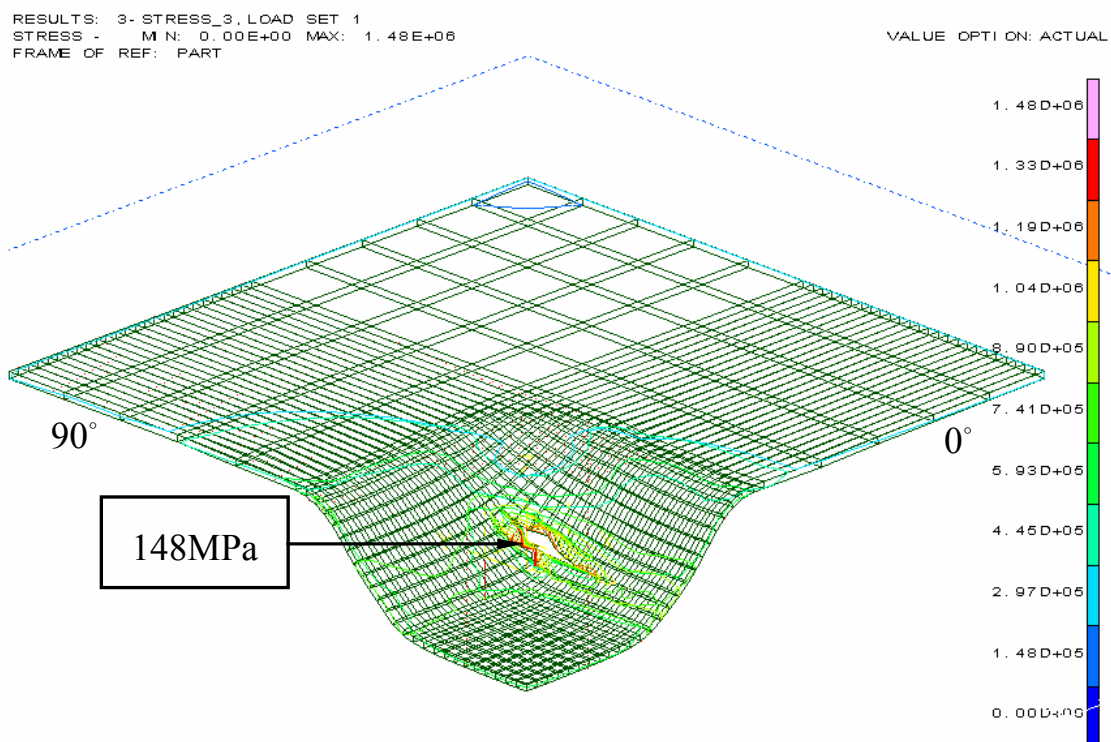


圖 4-37 方杯拉伸沖頭衝程達 13.20mm 之等效應力等值線分佈圖

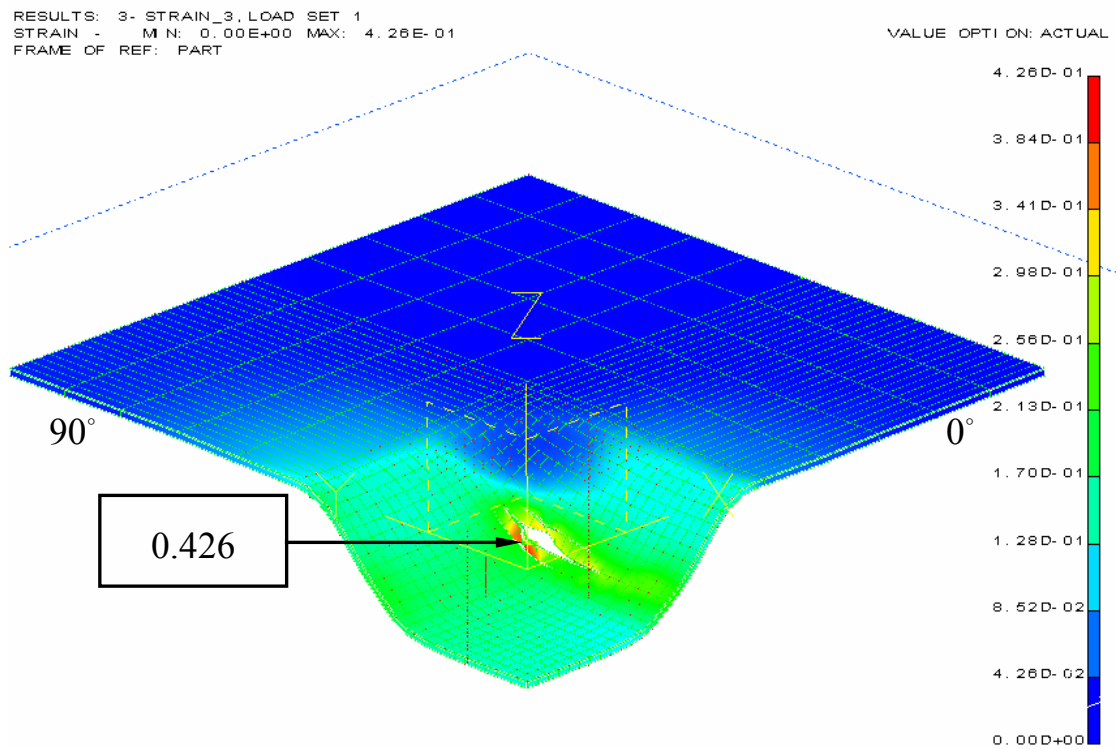


圖 4-38 方杯拉伸沖頭衝程達 13.20mm 之等效應變分佈圖

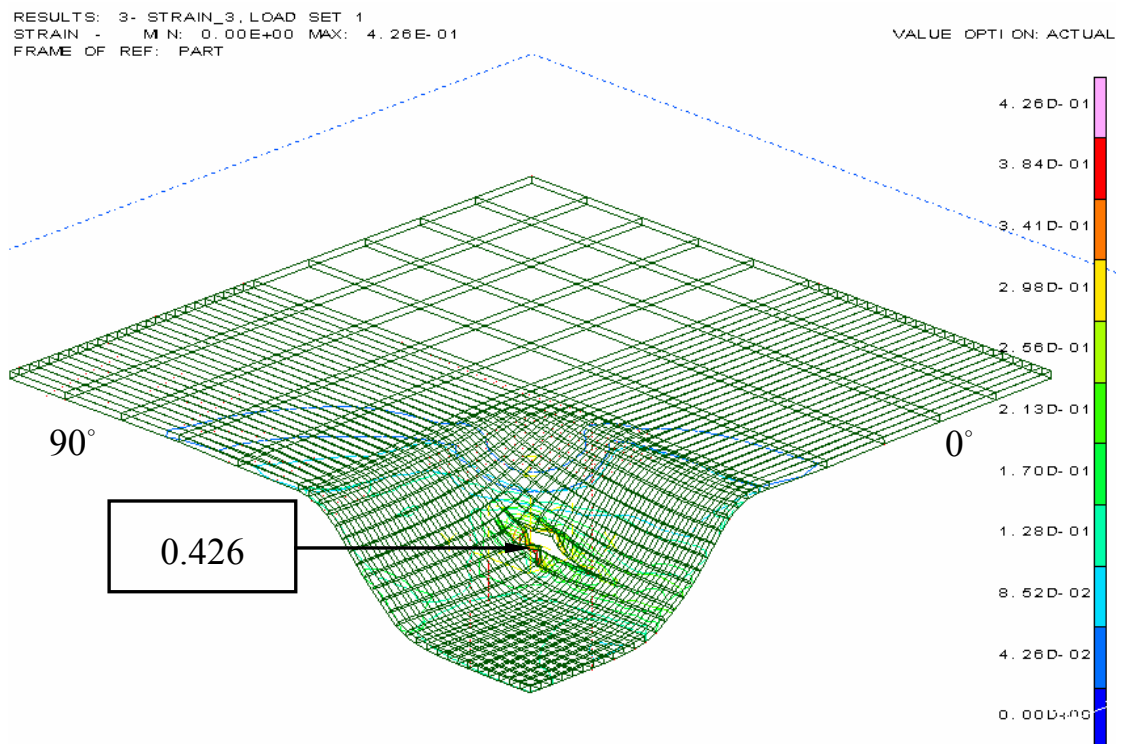


圖 4-39 方杯拉伸沖頭衝程達 13.20mm 之等效應變等值線分佈圖

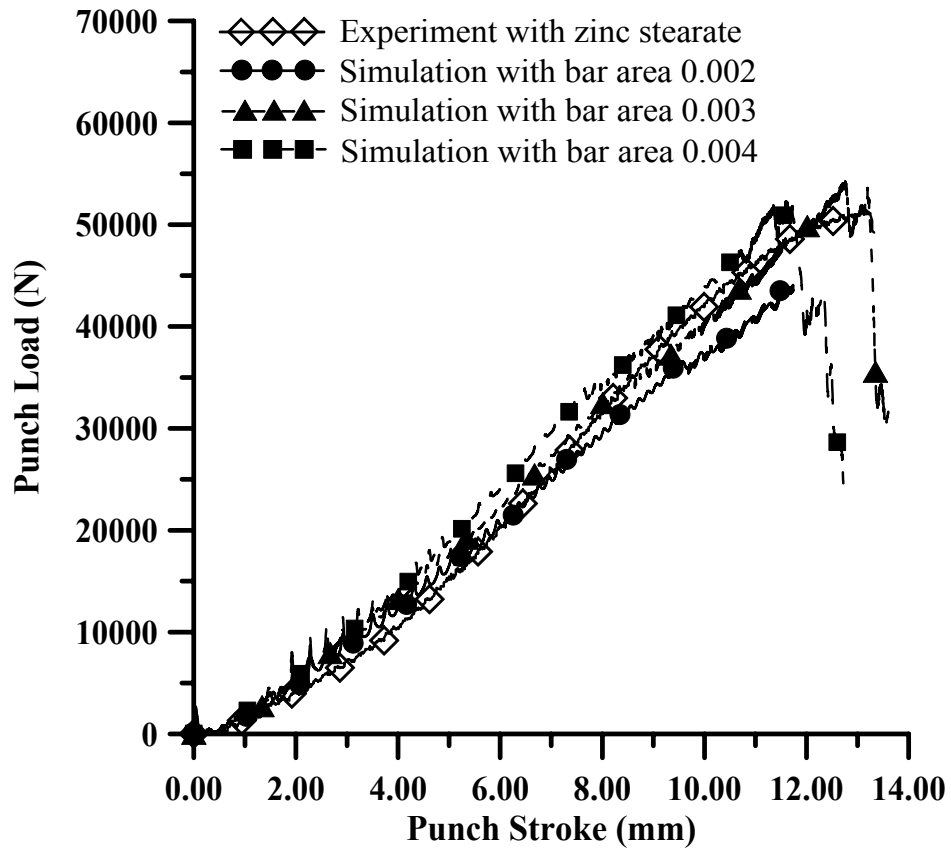


圖 4-40 方杯拉伸固定沖頭底邊及沖模平行邊入模圓弧角 R6.00mm 下於不同彈性棒面積之數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係

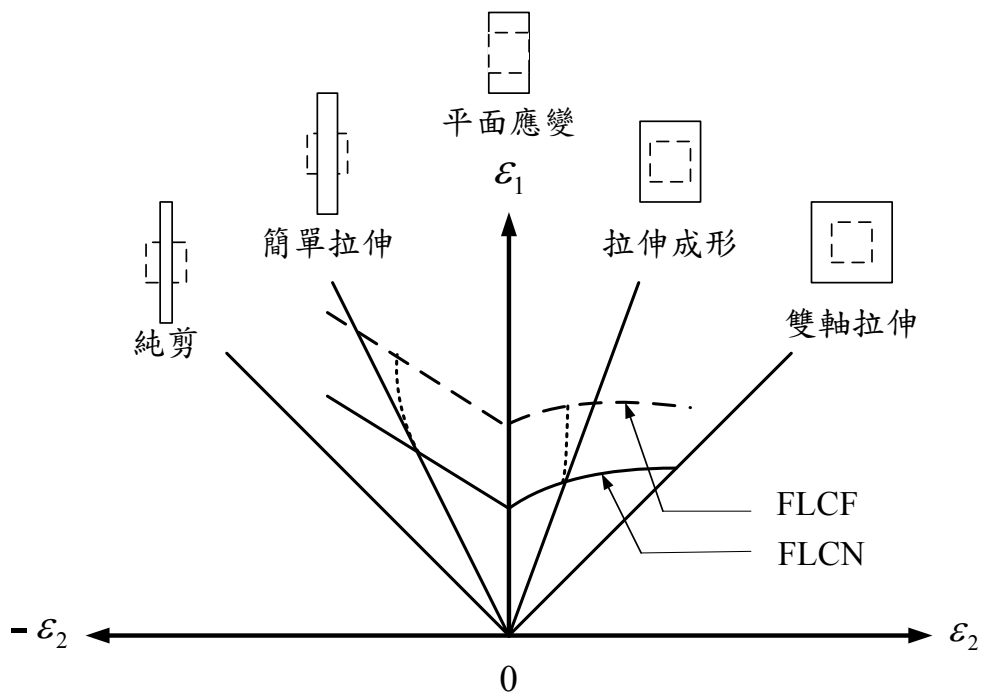


圖 4-41 成形極限示意圖

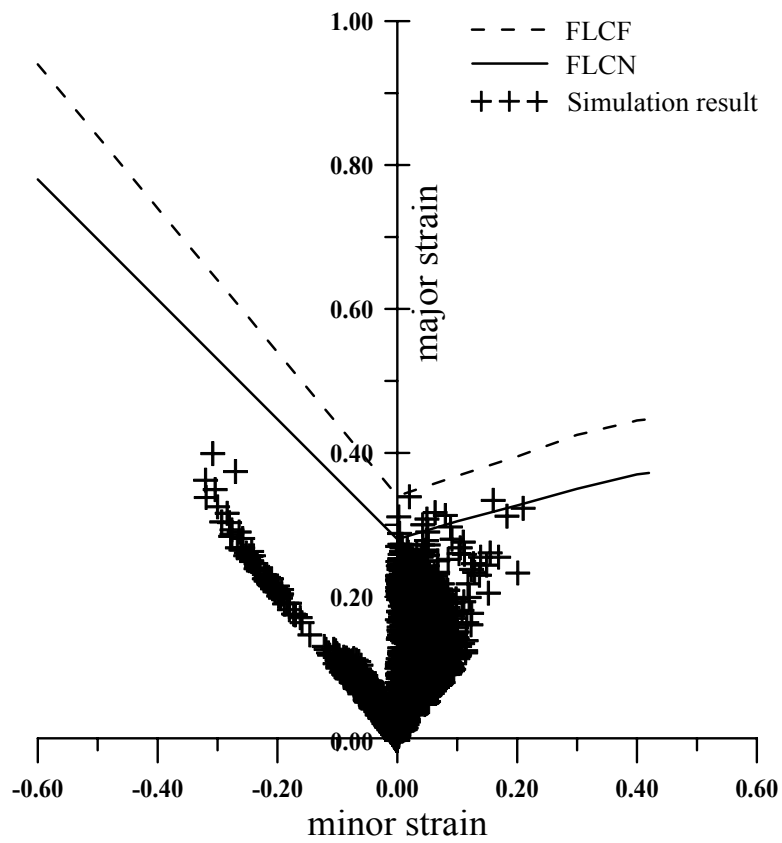


圖 4-42 方杯拉伸數值模擬在沖頭衝程達 13.05mm 時之成形極限圖

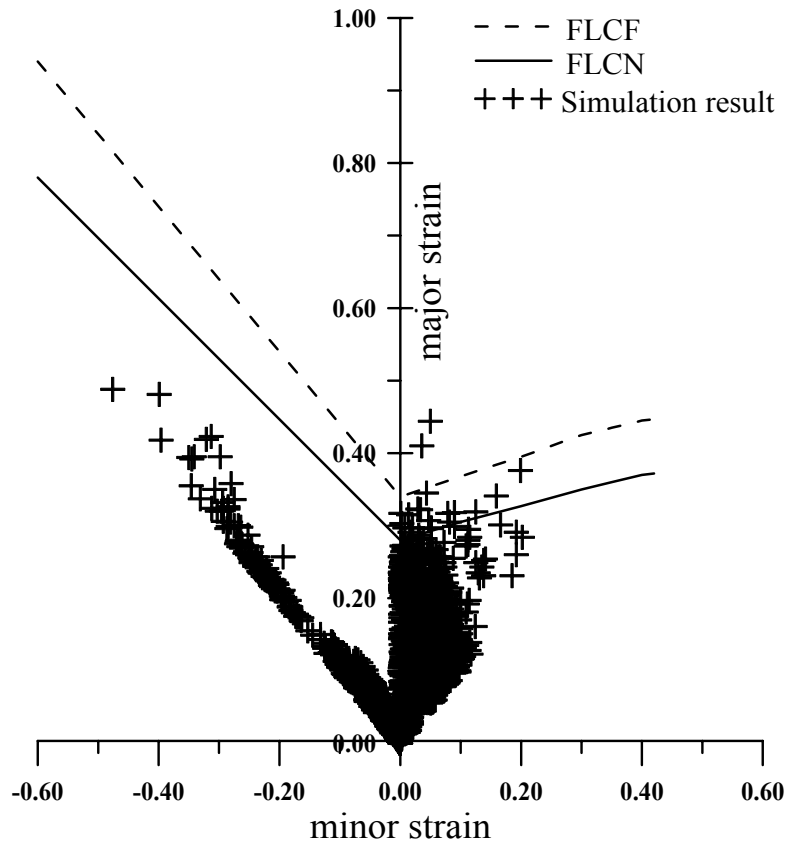


圖 4-43 方杯拉伸數值模擬在沖頭衝程達 13.25mm 時之成形極限圖

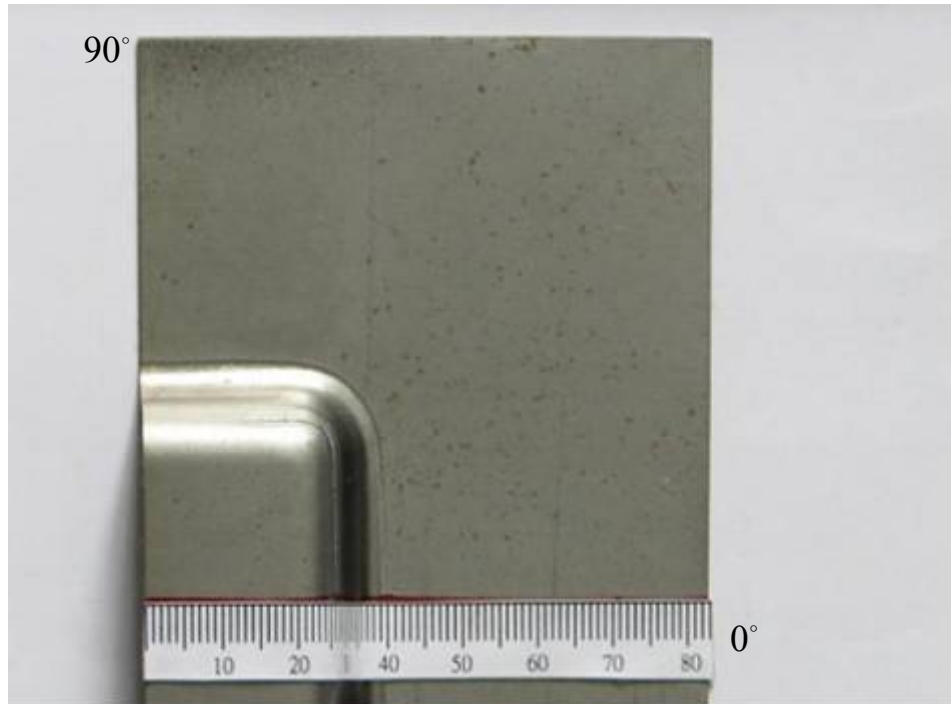


圖 4-44 工件沿軋軋方向夾 0 度角之厚度分佈量測之示意圖

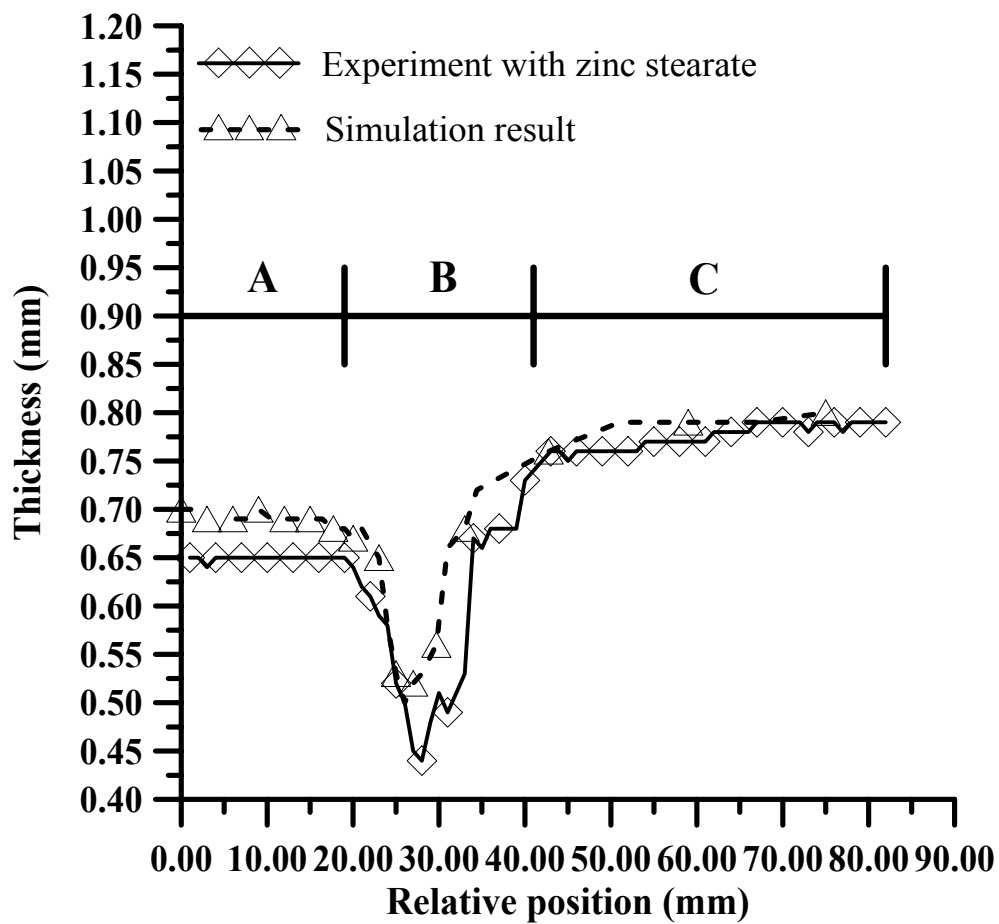


圖 4-45 沖頭衝程達 13.25mm 時之數值模擬與實驗工件
沿軋軋方向夾 0 度角的厚度分佈之比較

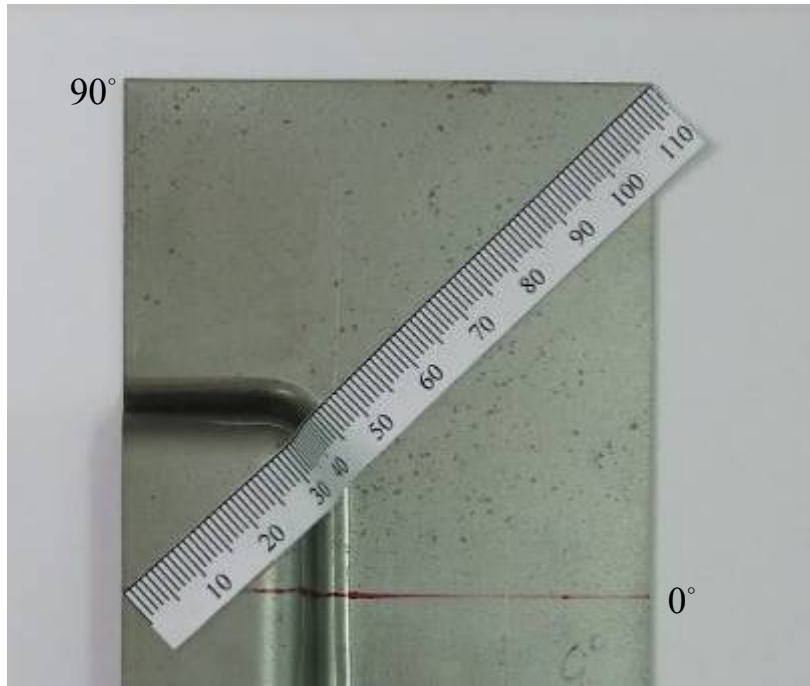


圖 4-46 工件沿軋軋方向夾 45 度角之厚度分佈量測之示意圖

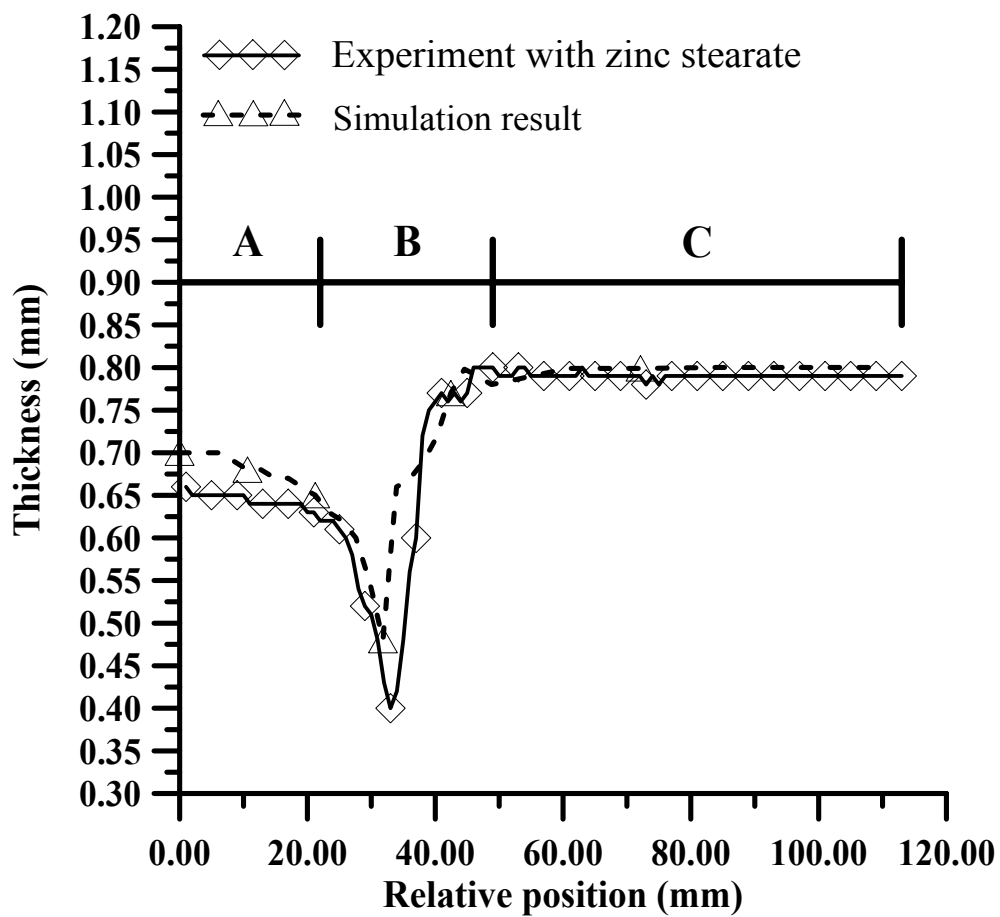


圖 4-47 沖頭衝程達 13.25mm 時之數值模擬與實驗工件
沿軋軋方向夾 45 度角之厚度分佈之比較

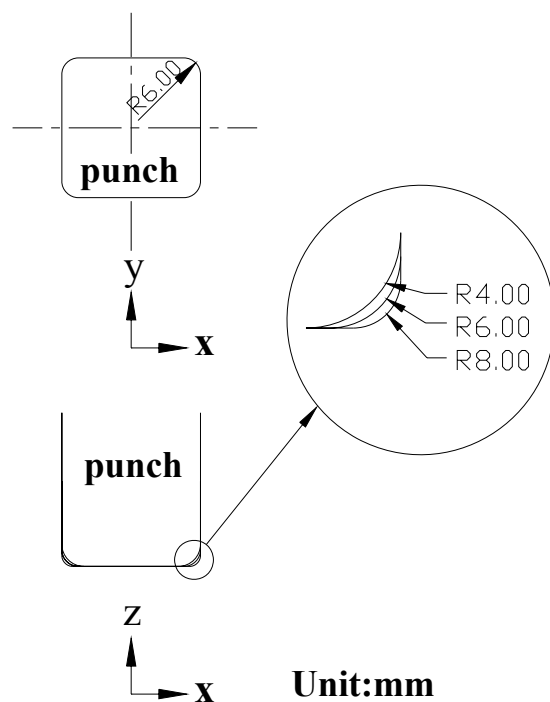


圖 4-48 不同沖頭底邊圓弧角半徑之尺寸示意圖

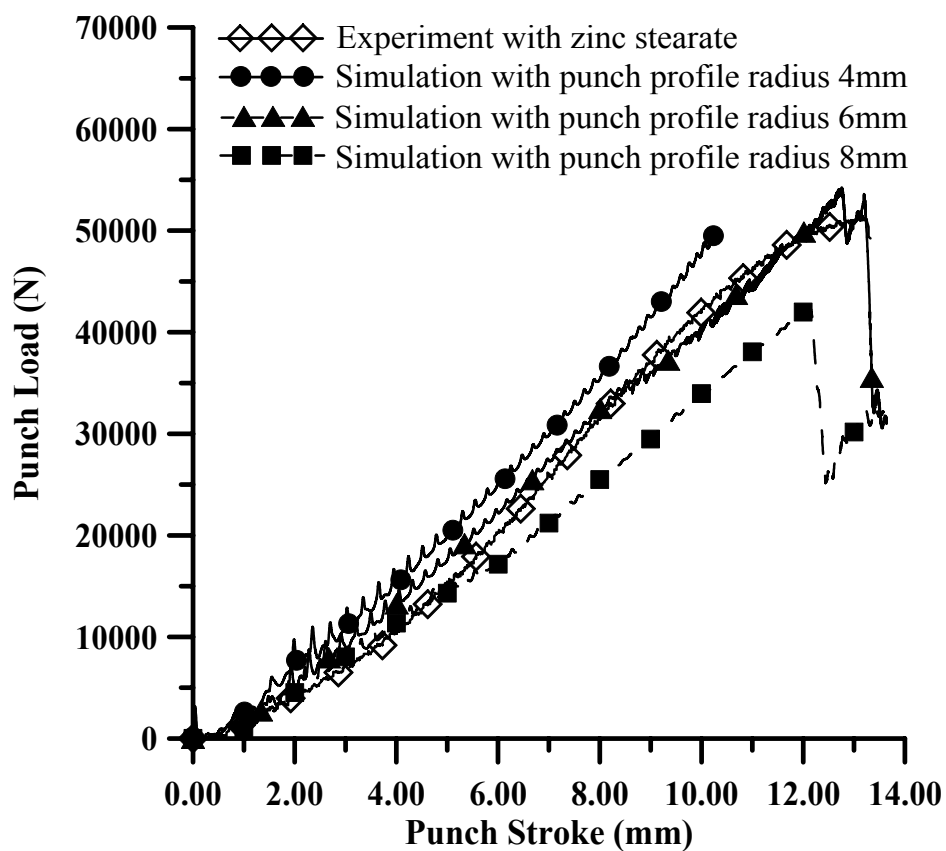


圖 4-49 方杯拉伸於固定沖模圓弧角半徑 R6.00mm 下於不同沖頭圓弧角半徑之數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較

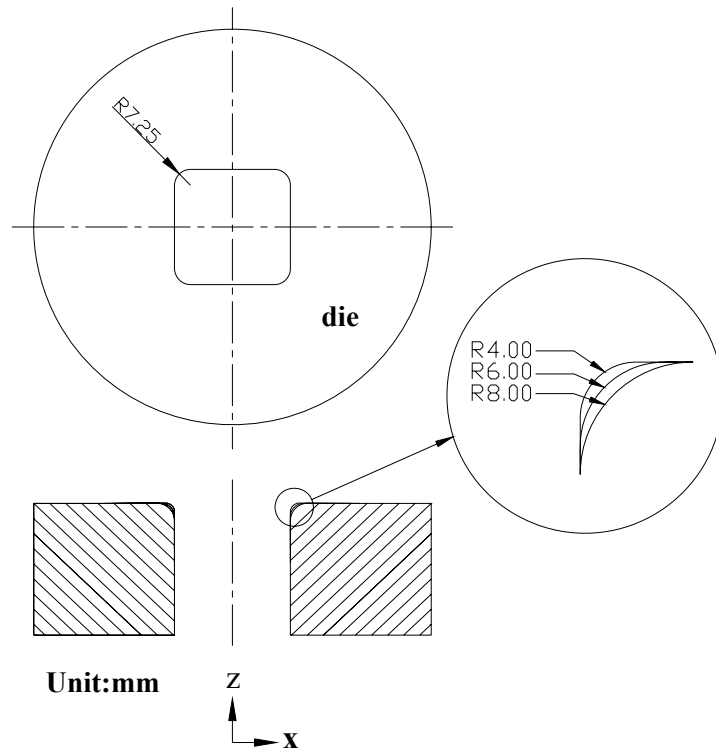


圖 4-50 不同沖模平行邊入模圓弧角半徑之尺寸示意圖

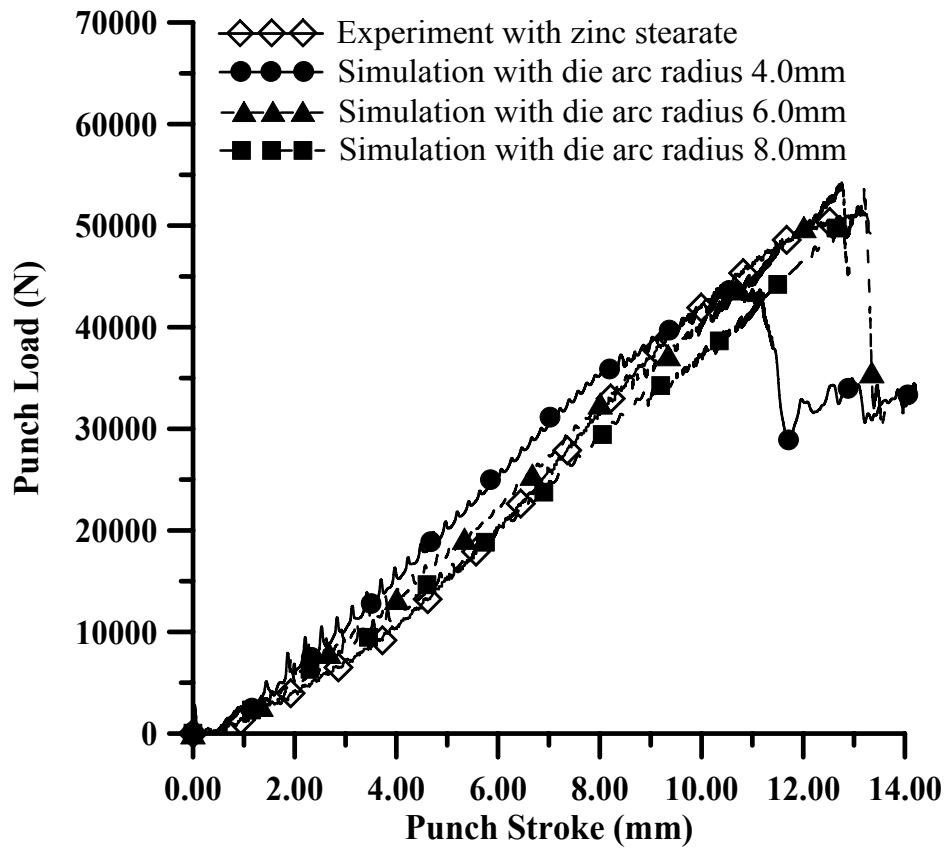


圖 4-51 方杯拉伸於固定沖頭圓弧角半徑 R6.00mm 下於不同沖模圓弧角半徑之數值模擬與實驗之沖頭負荷與衝程關係之比較

五、實驗擷取設備

5.1 InstruNet

InstruNet 是一組由硬體與軟體組成的設備，提供將 Macintosh 或是 Windows 等作業系統對實驗設備進行控制或是資料擷取的介面。instruNet 利用高速網路達到廉價且配合度良好的效果並提供電壓、數位和時間等訊號對電腦的輸入及輸出。

本計畫中實驗所採用之數值資料擷取設備包含一 PCI 介面之 instruNet i100HC DSP 控制卡、及 instruNet i200 之資料擷取盒，如圖 5-1 所示，其規格如表 5-1 所示，而 instruNet i100HC DSP 控制卡，如圖 5-2 所示，擷取電壓訊號時，主要是將雷射位移計之電壓訊號，先接入直流訊號傳送器，如圖 5-3 所示，再將主壓缸及緩衝缸之類比電壓訊號，使用單端式(single-end)接法連接，其連接方式如圖 5-4 所示，分別接入 i100HC 擷取盒中，其中為簡低雜訊干擾，V－電壓訊號需並聯一 $10K\Omega$ 之電阻，並將連接至電阻之線路接入接地埠，擷取盒及類比電壓訊號之整體連接情形如圖 5-5 所示，再將擷取盒之訊號，經由 DB-25 電纜線，連接至電腦內之 i200 控制卡，轉換成數位訊號進行資料擷取，並在 LabVIEW 8.0 之圖控軟體中設計一程式，其擷取程式外部面板及內部圖框分別如圖 5-6、圖 5-7 所示，並在程式中將電壓值轉換成負荷值後，將實驗數據連續存入檔案中。

5.2 National Instruments DAQPad-6016

本計畫另一套數值資料擷取裝置為 National Instruments 之 DAQPad-6016 資料擷取器與雷射位移計，分別如圖 5-8、圖 5-9 所示，資料擷取器與雷射位移計之規格，分別如表 5-2、表 5-3 所示，此數值資料擷取裝置採用 USB 介面，可以較方便於安裝及攜帶，主要是將雷射位移計之電壓訊號先接入直流訊號傳送器後，再加上主壓缸及緩衝缸之類比電壓信號，使用差分式(differential)接法分別接入 NI DAQPad-6016 資料擷取裝置之類比通道埠，其中 V－電壓訊號需並聯一 $10K\Omega$ 之電阻，並將連接電阻之線路接入接地埠，其接線示意如圖 5-10 所示，再經由資料擷取裝置，將類比訊號轉換成數位訊號進行擷取，並在 LabVIEW 8.0 之圖控軟體中，設計一程式將實驗之壓力訊號電壓值轉換成負荷值，並將擷取之實驗數據連續存入至檔案中，其擷取程式面板及內部圖框，分別如圖 5-11、圖 5-12 所示。

5.3 實驗設備擷取之比較

為驗證 instruNet 及 NI DAQPad-6016 實驗擷取設備之準確度，將與之前之

數值資料擷取設備 VIEWDAC，進行擷取資料比較，由於 instruNet 擷取設備之電壓輸入範圍為 $\pm 5V$ ，其中 $\pm 5V$ 電壓訊號之線性轉換數據，如表 5-4 所示，而 NI DAQPad-6016 及 VIEWDAC 擷取設備之電壓輸入範圍為 $\pm 10V$ ，其電壓訊號之線性轉換數據，如表 5-5 所示，為使三組設備能夠同時進行擷取，此次方杯拉伸實驗將於 $\pm 5V$ 之範圍進行比較，而三組實驗設備擷取之沖頭負荷與衝程之誤差比較，如表 A-6 所示，而實驗擷取設備之沖頭負荷與衝程圖，如圖 5-13 所示，由圖中可知三組實驗設備擷取之數據有良好之一致性。

5.4 單端式(Single-ended)與差分式(Differential)之差異

Single-End 的量測方法為如圖 5-14 所示讀取 instruNet 或 NI DAQPad-6016 輸入接頭中 Vin^+ (或 Vin^-)與 Gnd 之間的電壓值。Gnd 接頭通常是透過使用者的線路、instruNet 網路線或是外部電源供應線等接線將其接地，大部分供應 Single-End 輸出訊號的訊號放大器本身都有透過電源供應線接地。另外在 instruNet 或 NI DAQPad-6016 中為量測電壓所裝配的腳位其輸入值之單位為伏特。 Vin^+ 和 Vin^- 的腳位在 Single-End 的電壓值讀取上其功能是相同的。

Differential 的量測方法為如圖 5-15 所示讀取一對 instruNet 或 NI DAQPad-6016 輸入接頭 Vin^+ 與 Vin^- 之間的電壓值。當透過 instruNet 或 NI DAQPad-6016 讀取 Differential 的電壓值時 Gnd 接頭是沒有用到的；不論如何，我們必須小心的確保 Vin^+ 或 Vin^- 的電壓不能超過說明書上的最大電壓值。另外在 instruNet 或 NI DAQPad-6016 中為量測電壓所裝配的腳位其輸入值之單位為伏特。



圖 5-1 i100HC 資料擷取盒

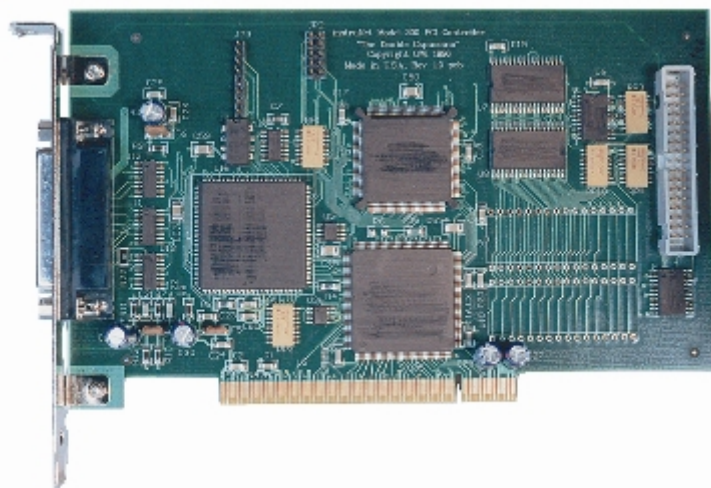


圖 5-2 i200 資料擷取卡

表 5-1 i100HC 資料擷取盒規格

擷取盒參數	規格
A/D 解析度	14-bit
電壓輸入範圍	$\pm 5V$
類比通道	16(single-end) / 8(differential)
訊噪比	78dB



圖 5-3 直流訊號傳送器

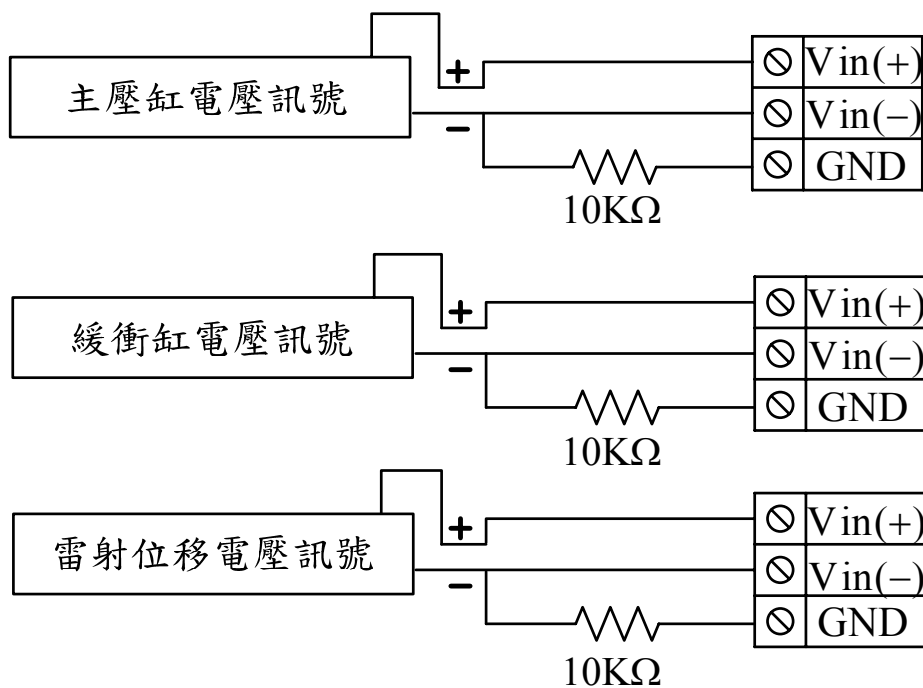


圖 5-4 電壓訊號源使用 differential 之連接示意圖

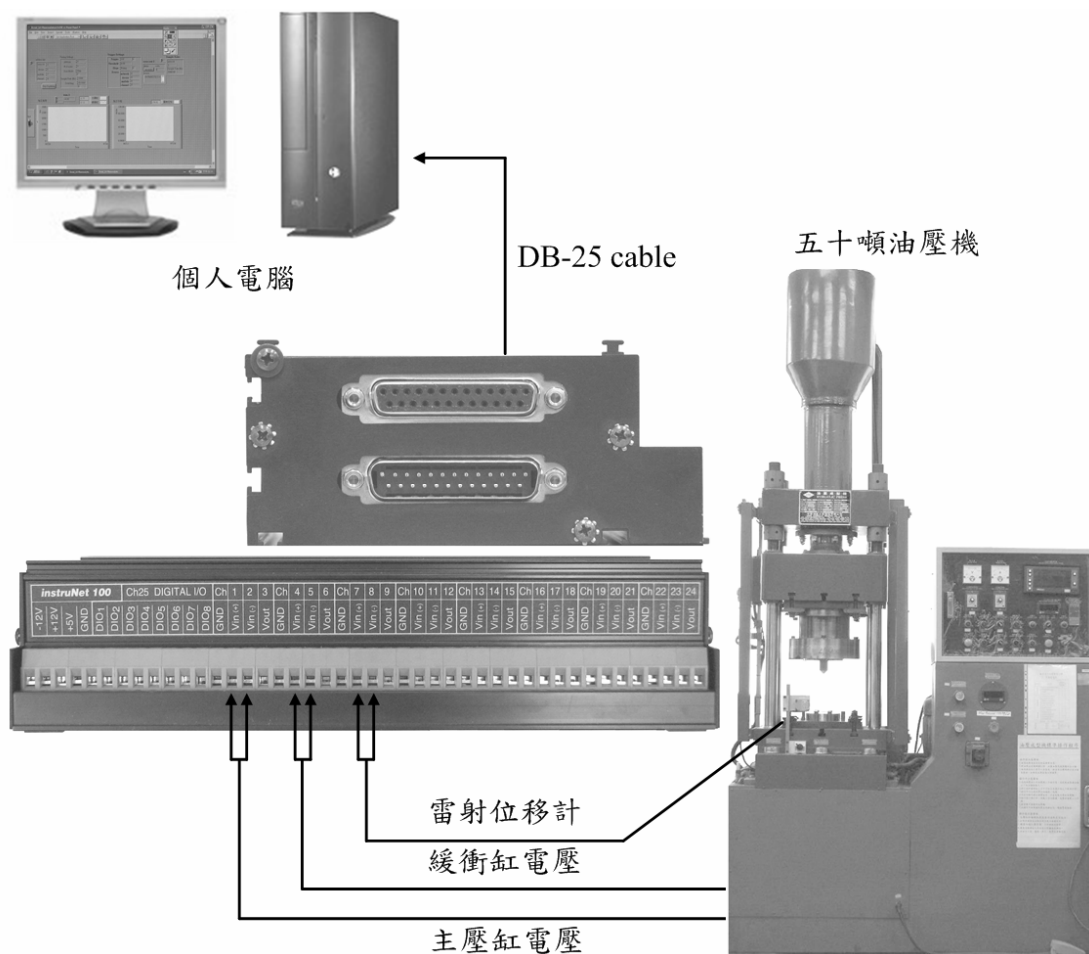


圖 5-5 雷射位移計液及壓缸壓力訊號接線之概況

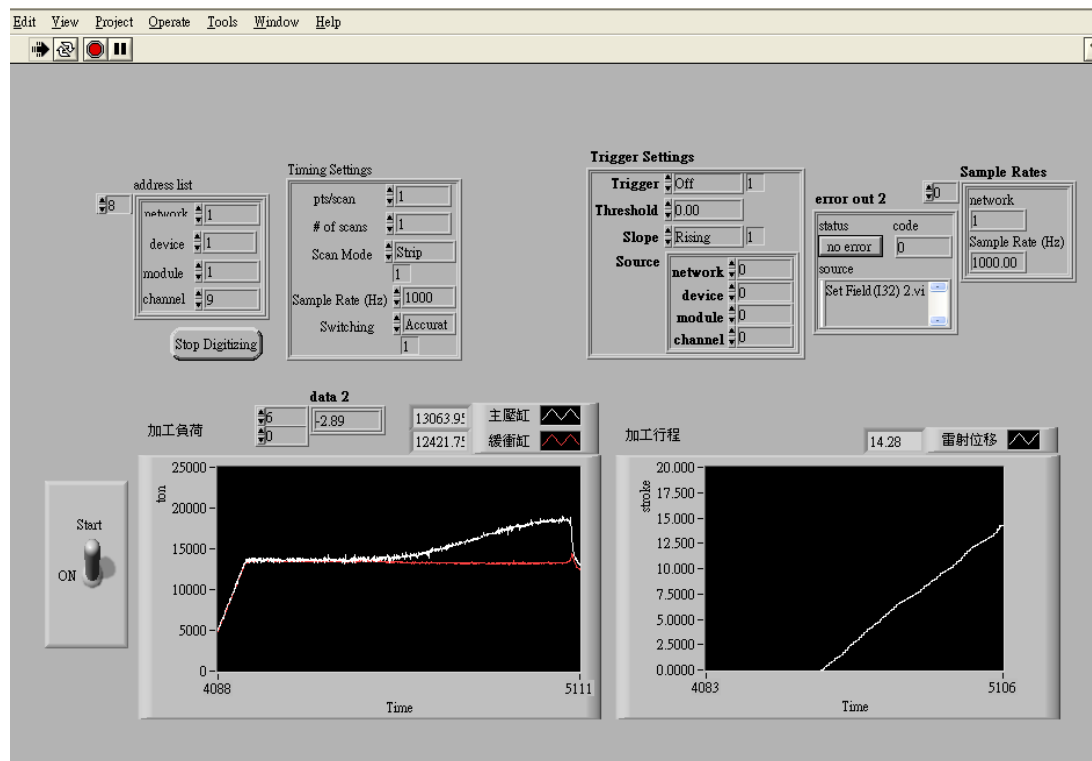


圖 5-6 instruNet 擷取裝置之程式面板圖

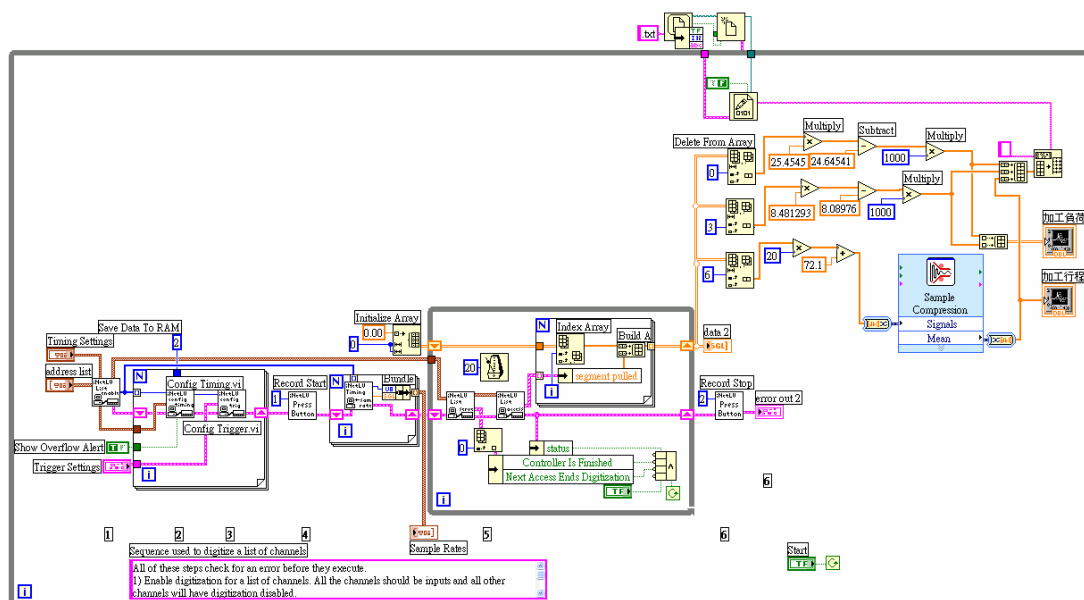


圖 5-7 instruNet 擷取裝置之內部圖框程式

表 5-2 NI DAQPad-6016 資料擷取裝置規格

擷取裝置參數	規格
A/D 解析度	16-bit
電壓輸入範圍	$\pm 10V$ 、 $\pm 5V$
類比通道	16(single-end) / 8(differential)
取樣頻率	200kS/s

表 5-3 雷射位移計規格

型號	PDS130-50N/C
量測範圍	$130 \pm 50\text{mm}$
解析度	$20\mu\text{m}$



圖 5-8 NI DAQPad-6016 資料擷取裝置



圖 5-9 雷射位移計

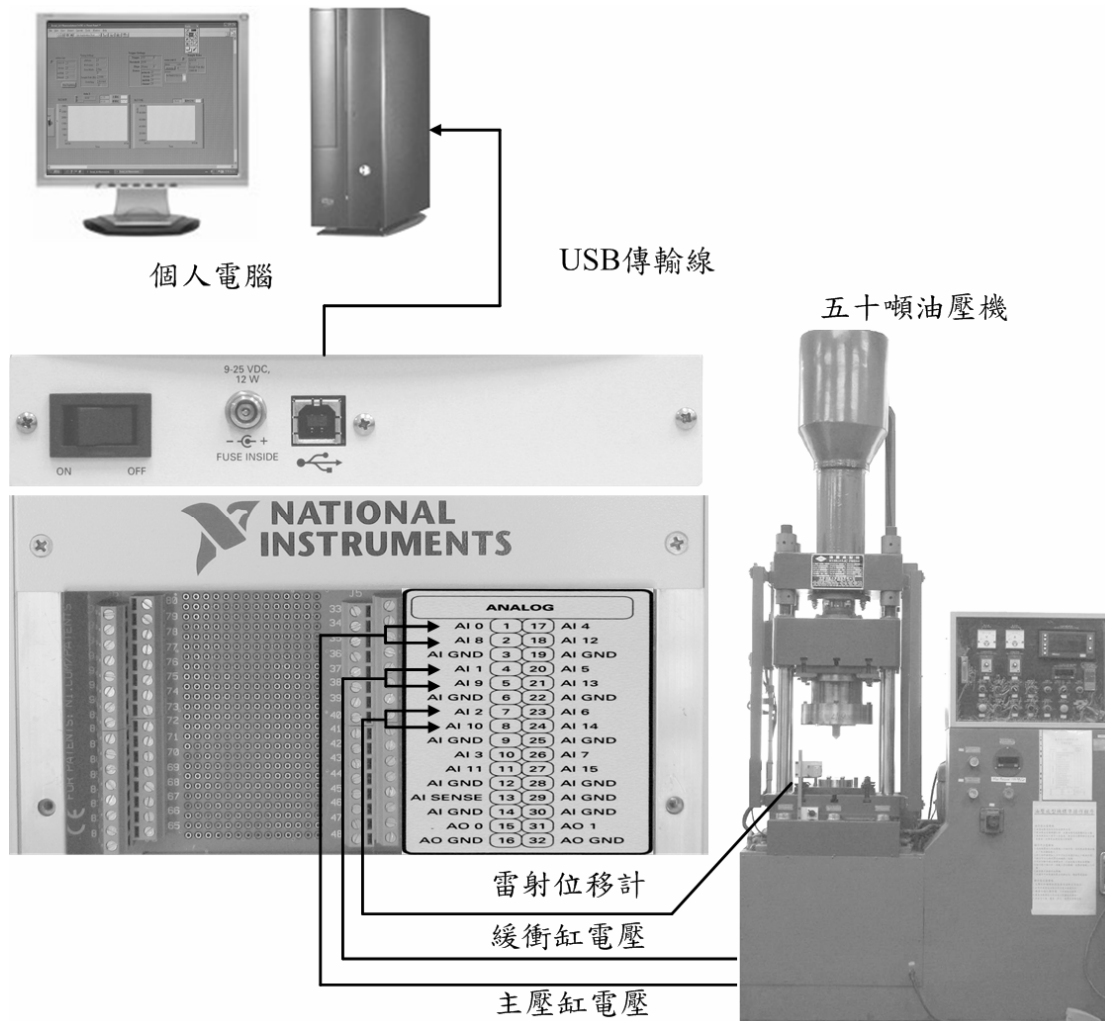


圖 5-10 NI DAQPad-6016 資料擷取裝置類比訊號接線之概況

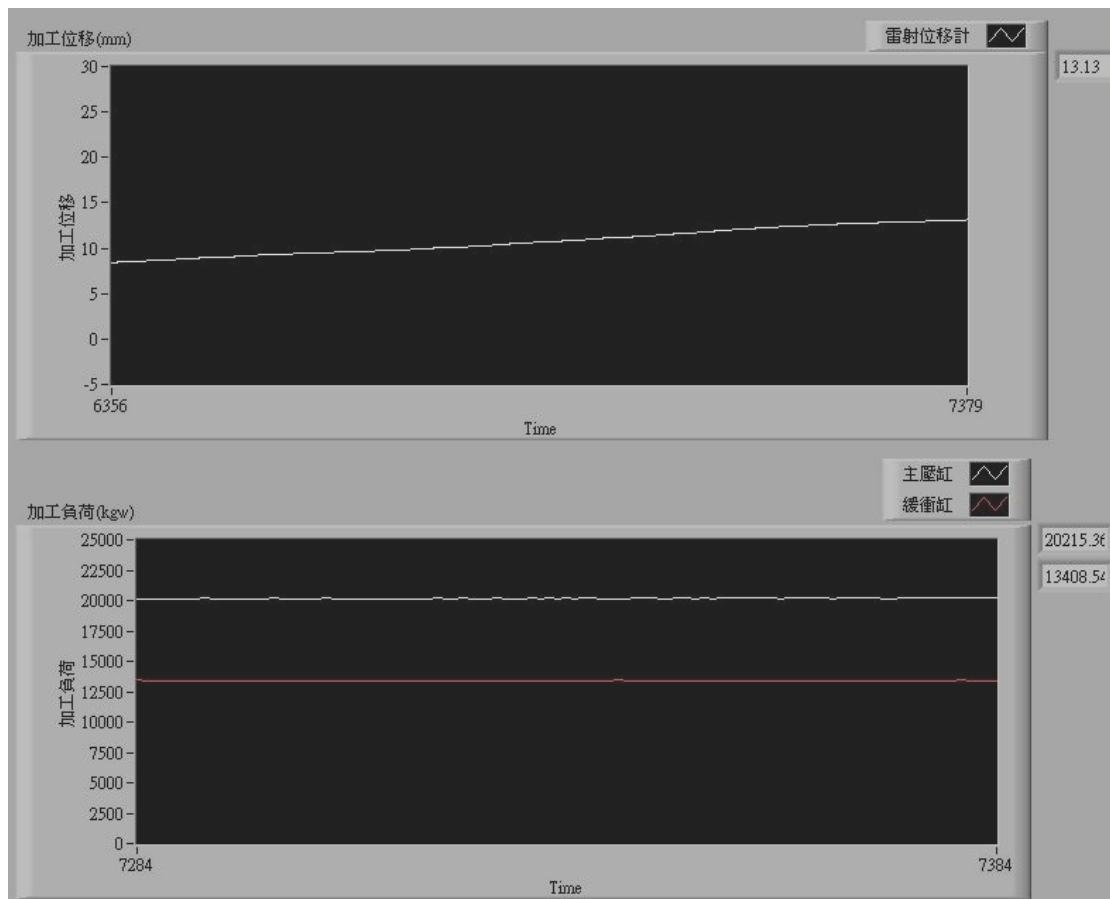


圖 5-11 NI DAQPad-6016 擷取裝置之程式面板圖

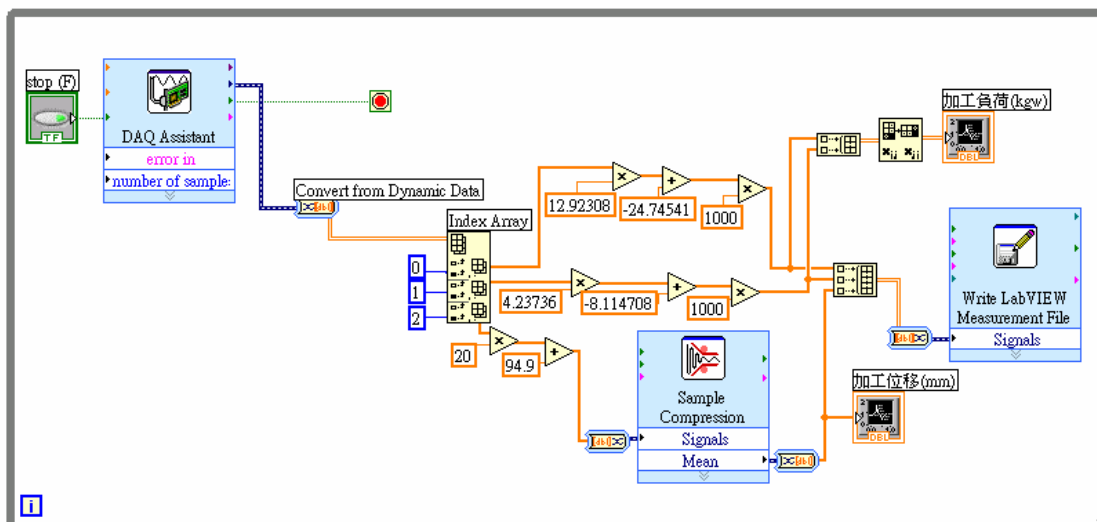


圖 5-12 NI DAQPad-6016 擷取裝置之內部圖框程式

表 5-4 $\pm 5V$ 電壓訊號之線性轉換數據

	斜率 Slope	偏移 Offset
主壓缸	12.92308	-24.74541
緩衝缸	4.236736	-8.114708

表 5-5 $\pm 10V$ 電壓訊號之線性轉換數據

	斜率 Slope	偏移 Offset
主壓缸	12.92308	-24.74541
緩衝缸	4.236736	-8.114708

表 5-6 三組實驗擷取設備之沖頭負荷與衝程之比較

	最大負荷(N)	誤差
VIEWDAC	51404.03	
instruNet	50893.10	-0.99%
NI DAQ6016	51798.61	0.77%

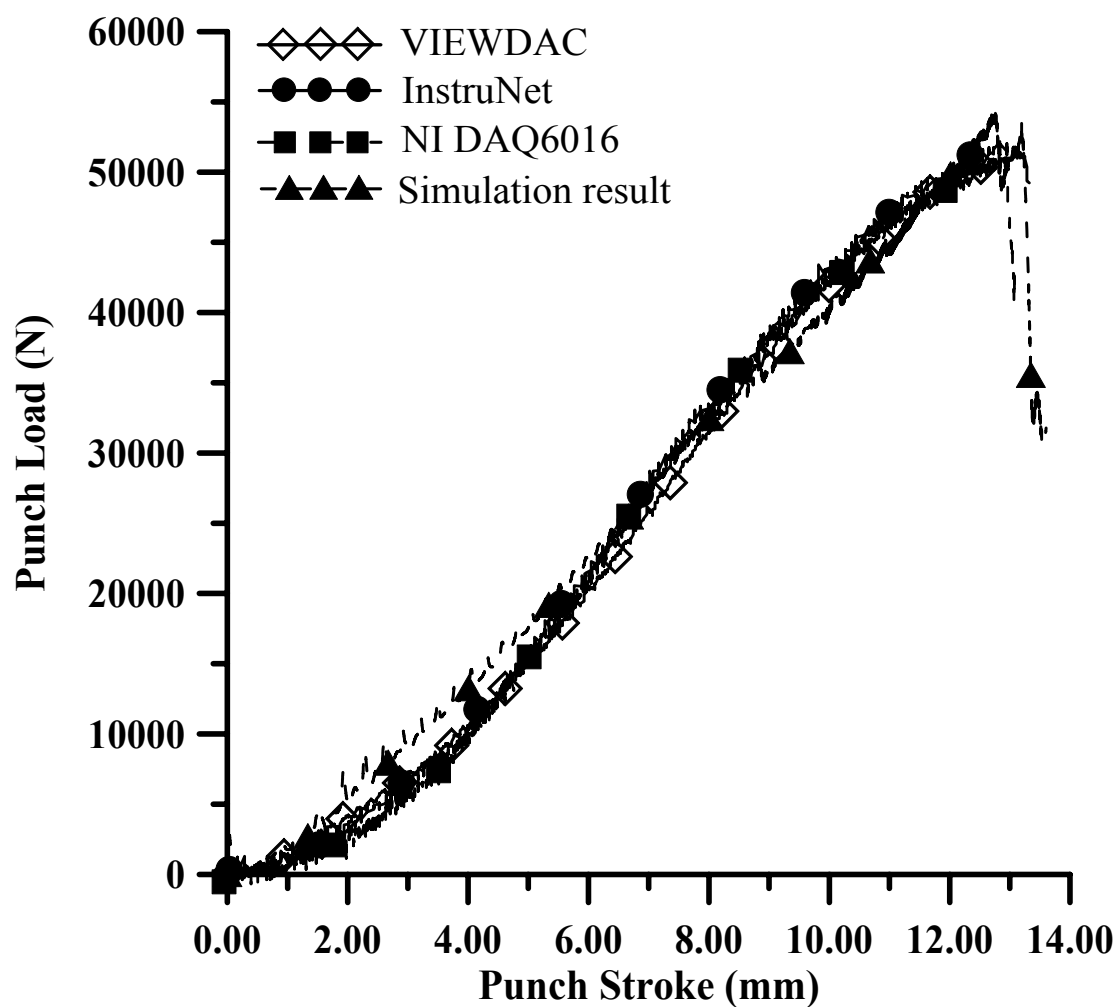


圖 5-13 三組實驗設備擷取之沖頭負荷與衝程之比較

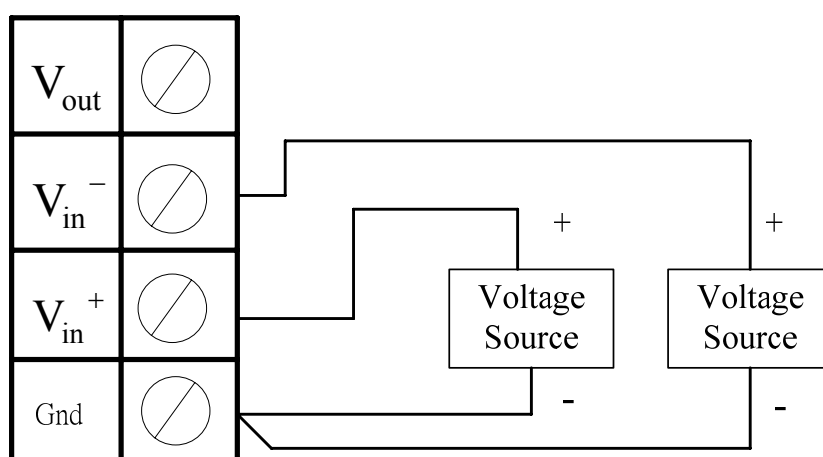


圖 5-14 兩個訊號來源下的 Single-Ended 電壓量測

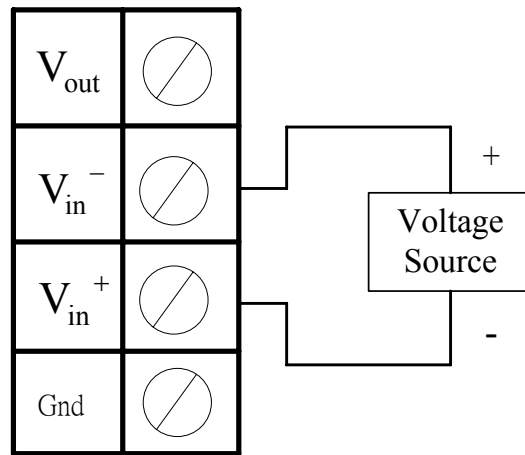


圖 5-15 一個訊號來源下的 Differential 電壓量測

六、結論

6.1 結論

本計畫採用顯性動態有限元素法，結合材料彈塑性理論，發展出一套增量型彈塑性大變形之三維顯性動態有限元素分析程式，並利用九節點元素來描述工具曲面，亦發展出彈性棒元素來處理料片與模具之接觸問題，將彈性棒元素與三維實體元素耦合後，應用於金屬板材拉伸之三維有限元素分析，本計畫將以此程式進行金屬板材方杯拉伸之分析，而後藉由數值模擬結果與實驗相比較，來確認此顯性動態有限元素分析程式的可靠性。

本計畫探討方杯拉伸成形歷程及裂紋成長歷程、工件厚度分佈、成形極限圖，及沖頭負荷與衝程關係，並設計一組方形沖模進行方杯拉伸成形實驗，最後根據數值模擬與實驗的結果可獲得以下之結論：

1. 在拉伸成形過程中，因工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處承受較大之雙軸向拉伸應力，有較大的應力集中，故在此處厚度縮減量最大，而破裂亦從此處開始，至於拉伸之杯底的平面部份，由於承受拉伸力較小，其厚度縮減之變化情形較不明顯。
2. 由實驗之沖頭負荷與衝程關係可知，最大負荷點發生在沖頭衝程達 13.20mm 時，因此在此衝程之前，成形之工件不會發生頸縮現象，而超過此點頸縮將開始發生，當衝程為 13.25mm 時，成形工件已發生破裂。
3. 在方杯拉伸破裂模擬中，由模擬料片之應力分佈可以看出工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處的應力及應變值較大，最先達到臨界破裂應變能密度 140MPa，在數值模擬中，料片初始之節點總數為 3844 個，在衝程 11.79mm 時，在工件沿輥軋方向夾 45 度角之角隅處產生一節點，並且隨著衝程之增加，在衝程 13.20mm 時節點總數增為 3883 個，而破裂之裂紋是從工件沿輥軋方向夾 45 度之角隅處開始，與實驗破裂之現象一致。
4. 數值模擬中，在固定沖模平行邊入模圓弧角半徑為 R6.00mm 之條件下，隨著沖頭底邊圓弧角半徑遞增，沖頭負荷會隨之遞減。而在固定沖頭底邊圓弧角半徑為 R6.00mm 之條件下，隨著沖模平行邊入模圓弧角半徑遞增，沖頭負荷會隨之遞減。
5. 數值模擬中，由方杯拉伸沖頭衝程達 13.05mm 時之主應變值及次應變值所繪製出之成形極限圖(FLD)可知，工件已達到頸縮不穩定之範圍，而當方杯拉伸數值模擬在沖頭衝程達 13.25mm 時，由其成形極限圖中應變值之分佈可知，已有應變值超過成形之破裂曲線，顯示工件已發生破裂。

七、参考文献

1. Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, E.L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 9, pp.353-386 (1975).
2. Huang, Y. M. and Liu, C. H., "An Analysis of the Square-Cup Stretching Process," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 49, pp.229-246 (1995).
3. Takuda, H., Mori, K., Fujimoto, H. and Hatta, N., "Prediction of Forming Limit in Deep Drawing of Fe/Al Laminated Composite Sheets Using Ductile Fracture Criterion," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 60, pp.291-296 (1996).
4. Mamalis, A. G., Manolakos, D. E. and Baldoukas, A. K., "Finite-Element Modeling of the Stretch Forming of Coated Steels," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 95, pp.116-121 (1997).
5. Jain, M., Allin, J. and Lloyd, D. J., "Fracture Limit Prediction Using Ductile Fracture Criteria for Forming of an Automotive Aluminum Sheet," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp.1273-1288 (1999).
6. Takuda, H., Mori, K. and Hatta, N., "The Application of Some Criteria for Ductile Fracture to the Prediction of the Forming Limit in Sheet Metals," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 95, pp.116-121 (1999).
7. Takuda, H., Mori, K., Fujimoto, H. and Hatta, N., "Prediction of Forming Limit in Bore-Expanding of Sheet Metal Using Ductile Fracture Criterion," *Journal of Materials Processing Technology*, pp.433-438 (1999).
8. Takuda, H., Mori, K., Takakura, K. and Yamaguchi, K., "Finite Element Analysis of Limit Strains in Biaxial Stretching of Sheet Metals Allowing for Ductile Fracture," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 42, pp.785-798 (2000).
9. Worswick, M. J. and Finn, M. J., "The Numerical Simulation of Stretch Flange Forming," *International Journal of Plasticity*, Vol. 16, pp.701-720 (2000).
10. Han, H. N. and Kim, K. H., "A Ductile Fracture Criterion in the Sheet Metal Forming Process," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 142, pp.231-238 (2003).
11. Zacharopoulos, D. A., "Stability Analysis of Crack Path Using the Strain Energy Density Theory," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 41, pp.327-337 (2004).
12. Fung, Y. C., "Foundation of Solid Mechanics," *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, N.

- J. (1965).
13. Anderson, T. L., "Fracture mechanics: Fundamentals and applications," *CNC Press*, B. R. (1995).

學生畢業論文：

14. 蔡毅瑋，“適應性網路模糊推論系統於方杯引伸製程最佳化料片之研究”，淡江大學機械與機電工程學系(2004).
15. 陳紹平，“金屬板材方孔凸緣製程之成形極限分析”，淡江大學機械與機電工程學系(2004).
16. 陳振德，“金屬板材孔凸緣再貫穿製程之成形極限分析”，淡江大學機械與機電工程學系(2004).
17. 蕭啟成，“金屬板材圓杯拉伸成形極限之分析”，淡江大學機械與機電工程學系(2005).
18. 鄧維明，“金屬板材方杯深引伸成形極限之動顯函有限元素分析”，淡江大學機械與機電工程學系(2006).
19. 劉得仁，“金屬板材方杯拉伸裂紋成長之預測”，淡江大學機械與機電工程學系(2006).

八、符號索引

A ：物體特定的面積

A_e ：元素之面積

d^0A ：變形前之面積

dA ：變形後之面積

a_{ij} ：變形前座標系統 0x_i 之 Euclidean 度規張量

${}^t\mathbf{B}_L$ 與 ${}^t\mathbf{B}_{NL}$ ：線性和非線性應變位移關係矩陣

${}_t\mathbf{B}_L$ 與 ${}_t\mathbf{B}_{NL}$ ：線性和非線性元素的應變位移關係矩陣

c ：波速

\mathbf{C} ：阻尼矩陣

${}_0C_{ijrs}$ ：本構張量

${}_0\mathbf{C}$ 與 ${}_t\mathbf{C}$ ：材料性質增量矩陣

$D_{ij}^{(ie)}$ ：非彈性變形速度張量

D_{ij}^P ： $D_{ij}^{(ie)}$ 在塑性變形的情況

D_{ij} ：變形速度張量

E ：材料之楊氏係數

E_{ij} ：Almansi 應變張量

e_{ij} ：Cauchy 應變張量

${}_0e_{ij}$ ：對應於時間 0 的線性應變增量

${}_te_{ij}$ ：對應於時間 t 的線性應變增量

${}_{t+\Delta t}e_{ij}$ ：Cauchy 極小的應變張量

${}_0\mathbf{F}$ ：等效於元素應力節點力向量

d^0F ：變形前曲面上之作用力

dF ：變形後曲面上之作用力

${}^{t+\Delta t}_0 F^{(i)}$ ：節點力

${}^{t+\Delta t} f_i^A$ ：時間 $t + \Delta t$ 時，每單位面積所受之表面作用力

${}^{t+\Delta t} f_i^B$ ：時間 $t + \Delta t$ 時，每單位體積之作用外力

${}^{t+\Delta t}_t f_k$ ：自重

g_{ij} ：變形後座標系統 x_i 之 Euclidean 度規張量

g ：陷入量

g_z ：垂直方向之陷入量

g_n ：法線方向之陷入量

g_m ：到工具表面之最短距離

h_k ：對應於節點 k 的形狀函數

H' ：單軸的應力—應變關係式中得到的斜率 $d\sigma/d\varepsilon$

h_k ：對應節點 k 的形狀函數

${}^t\mathbf{J}$ ：時間 t 之 Jacobian 運算子

${}^t_0\mathbf{K}_L$ 與 ${}^t_0\mathbf{K}_{NL}$ ：對應於線性及非線性應變增量之剛性矩陣

K ：應力強度因子

L_{ij} ：速度梯度張量

L_e ：元素任意兩節點之最短距離

l ：元素中最長的邊

\mathbf{M} ：元素質量矩陣

N ：形狀函數

N ：元素節點的個數

n_{ij} ：單位法線張量

0n_j ： d^0A 中單位法線向量之分量

\mathbf{R} ：節點外力向量

P_t ：摩擦力

r ：裂縫尖端到鄰近裂縫尖端一點之距離

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ ：外虛功

S_{ij} ：2nd Piola-Kirchhoff 應力張量

${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij}$ 與 ${}^{t+\Delta t}_t S_{ij}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力張量的卡式分量

${}_0^t S_{ij}$ 與 ${}_0 S_{ij}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力增量

${}_0^t \mathbf{S}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力矩陣

${}_0^t \hat{\mathbf{S}}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力向量

${}^{t+\Delta t}_t S_{ij}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力張量的卡式分量

${}_t S_{ij}$ ：2nd Piola-Kirchhoff 應力張量在結構時間 t 的卡式分量

Δt ：時間增量

${}^{t+\Delta t}_t t_k$ ：表面力

\bar{t}_i ：表面力或接觸力

${}_t u_i$ ：物體在時間 t 之位移

${}_t u_i^k$ ：節點 k 於時間 t 在 i 方向的位移

${}^{t+\Delta t} u_i$ ：物體在時間 $t + \Delta t$ 之位移

u_i ：位移增量

δu_i ：虛位移

δu_k ：目前位移分量 ${}^{t+\Delta t} u_k$ 之變分

δu_i^A ：表面積 ${}^{t+\Delta t} A_f$ 上所求得之虛位移 δu_i

\mathbf{u} : 元素節點的位移向量

$\dot{\mathbf{u}}$: 元素節點的之速度向量

$\ddot{\mathbf{u}}$: 元素節點的之加速度向量

$\frac{dW}{dV}$: 單位體積之應變能

V : 物體特定的體積

x_i : 直角座標

0x_i : 描述物體在變形前之座標

tx_i : 描述物體在變形後特定時間 t 之座標

${}^{t+\Delta t}x_i$: 描述物體在變形後特定時間 $t + \Delta t$ 之座標

δ_{ij} : Kronecker delta

${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$: Cauchy 無限小的應力張量

τ_{ij} : Cauchy 應力張量

${}^t\boldsymbol{\tau}$: Cauchy 應力矩陣

${}^t\hat{\boldsymbol{\tau}}$: 應力向量

$\bar{\sigma}$: 等效應力

σ_y : 降伏應力

σ_{ij} : Cauchy 應力

${}^{t+\Delta t}_t\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$: Green-Lagrange 應變張量的卡式分量

$\delta {}^{t+\Delta t}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$: Green-Lagrange 應變張量的卡式分量之變分

$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$: Green-Lagrange 應變張量

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}$: Green-Lagrange 應變率張量

${}_0\epsilon_{ij}$: Green-Lagrange 應變增量

${}^{t+\Delta t}_t\epsilon_{ij}$: Green-Lagrange 應變張量的卡式分量

${}_0\eta_{ij}$: 對應於時間 0 的非線性應變增量

${}_t\eta_{ij}$: 對應於時間 t 的非線性應變增量

$\pi 1$ 、 $\pi 2$ 、 $\pi 3$ 、 $\pi 4$: 包圍每個工具曲面的邊界面

ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 : 自然座標

ν : 浦松氏比

Ψ : Penalty 數

上標或下標

•：變化率

0：變形前有關的量

t ：變形後有關的量

i ：座標軸

,：對座標的微分

e：彈性

p：塑性

k ：節點

α ：節點

九、誌 謝

本研究承蒙國科會三年之經費補助，特此致謝。並感謝中國鋼鐵股份有限公司提供材料拉伸試驗之數據，以利數值分析與實驗結果之比較。

十、計畫成果自評

本研究計畫執行完成後，其具體成果及效益敘述如下：

在板金成形製程分析方面：完成三維顯性動態有限元素法之理論推導及程式化，成為一增量型彈塑性大變形三維顯性動態有限元素分析程式，進而完成板金深引伸與拉伸成形之成形極限與裂紋成長之電腦輔助工程分析。

在資料擷取設備之硬體更新及軟體升級方面：由於現有資料擷取設備使用已超過十年，接觸介面已老化且接觸不良，於資料擷取及傳輸時，往往會發生不可預期的中斷現象。經由本計畫資料擷取設備之硬體更新及軟體升級後，不僅改善了整體實驗之數據擷取效能，同時也增強實驗人員於資料擷取軟體應用之設計能力。

在板金拉伸成形實驗方面：使用 I-DEAS 軟體繪製出拉伸成形時所需之模具設計圖，並依設計圖完成模具之開發與製作，再將模具組裝於五十噸液壓成形機上，並結合更新後的資料擷取設備，使實驗時可完整的擷取實驗數據。當所有實驗設備均經過安全測試及校正後，隨即進行方杯拉伸成形實驗，再與數值模擬之分析結果相比較，並於實驗後量測成形工件之外形，同時利用數位相機擷取成形工件之數位影像，再與數值分析之最終成形結果相互套疊比較。

本計畫也完成材料試片之機械性質量測，並將這些機械性質相關數據輸入本計畫所發展之三維顯性動態有限元素分析程式中，透過數值分析與實驗結果之比較，更能反應出材料之機械性質對板金拉伸成形分析之實際影響。根據數值模擬與拉伸成形實驗之沖頭負荷與衝程關係、工件厚度變化、成形極限圖，及加工卸載後工件裂紋成長等結果之驗證，並確認適用於金屬板材拉伸成形極限分析之延性破裂準則，及本計畫所發展增量型彈塑性大變形三維顯性動態有限元素分析程式之可靠性。

而參與本計畫之研究人員，經由實驗、資料擷取軟硬體之設計與應用，及有限元素程式之分析，將可加強其模具製作實務及程式設計與分析結果之判讀能力，更能在研究的過程中尋找、發現，並解決問題，對於參與之研究人員往後的生涯規劃上，均能有莫大的啟迪與幫助。

本計畫所發展之程式具有電腦輔助工程分析之功能，於分析之過程中可隨時透過電腦輔助設計軟體顯示工件之外形，可作為即時評估與設計時之參考，以滿足模具設計者與加工分析人員之改善依據。於成形極限之分析上，可配合適當之延性破裂準則，以預測製造生產時工件可能發生缺陷的位置或裂紋成長的情形，以作為製程改善與模具改良設計之依據，以期得到形狀精確的產品。由於本計畫所發展的程式，是以電腦輔助設計軟體設計模具外形，因此可推廣至任意幾何外形之模具，除具備一般學術價值之外，於實用上的功能亦不可忽視，而研究成果已發表在知名的期刊和研討會中，對提升國際研究地位也有相

當的助益。